復刊

微分幾何学とゲージ理論

茂木 勇・伊藤光弘 著

共立出版株式会社

まえがき

本書は，これからゲージ理論を学ぼうとする人のために書かれた，ゲージ理論の数学的解説書である．

ゲージ理論は，そもそも物理学における場の理論から生まれたものであるが，ゲージ場の考えは1920年代に数学者 H. Weyl によって導入された．今日のゲージ理論は，1954年に出た C. N. Yang と K. L. Mills の論文 [56] によって基礎づけられたもので，物理学とはまったく独立に数学の世界で研究され発展したファイバー束と接続幾何学の枠組みでとらえられている．いつの時代でも，数学と物理学との間には密接な関係があったが，ゲージ理論においては特に深いかかわりがある．これについては C. N. Yang も，「非アーベル的ゲージ場が，物理学の世界とはまったく関係なしに数学者が発展させたファイバー束の佳麗な理論の考え方と，概念として同一のものであるということは驚嘆に値する」といっている．

物理学では，物質の存在形態や運動にかかわる4種の相互作用が考えられている．それは，強い相互作用，弱い相互作用，電磁場による相互作用，および重力場による相互作用である．これらの相互作用を統一的に論じようというのが統一場理論の目標であるが，その統一理論を築く上で，ゲージ理論は最も有力とされている．数学は，その枠組みとそれを攻略する強力な武器を提供しているといえよう．

一方，ゲージ理論は，数学上では，微分幾何学ばかりでなく微分位相幾何学，非線形微分方程式論，代数幾何学などにも深いかかわりをもち，ゲージ理論の数学的発展がこれら数学の諸分野にも多大の影響を及ぼしている．

本書の第一の目的は，ゲージ理論の基本概念の数学的な定式化である．ゲージ理論は物理学の世界で発展し，それが数学的な枠組みによって定式化されるようになったので，ゲージ理論の物理学での用語と，枠組みとして用いられる

数学上の術語との間によび方のずれが起こっている．下にその例をいくつか示してみるが，これは注意して読み替えをすればすむことで，それによって大きな支障が起こるわけではない．

（物理学での用語）	（ファイバー束の用語）
ゲージタイプ	主ファイバー束
ゲージ	局所自明写像
ゲージ群	構造群
ゲージ変換	束自己同型写像，変換関数
ゲージ場	
ゲージ・ポテンシャル	接続
フィールド・ストレングス	曲率（形式）
Yang–Mills 場	Yang–Mills 接続
波動関数	ベクトル束の切断
位相因子	平行移動
インスタントン	$\boldsymbol{R}^4$ または S^4 上の自己双対 Yang–Mills 接続
積分可能条件	Bianchi の恒等式
位相的量子数	主ファイバー束の指数，特性数
電磁場	$U(1)$ 束上の接続
アイソスピンゲージ場	$SU(2)$ 束上の接続
作用積分	Yang–Mills 汎関数

本書の第二の目的は，この理論の発展の中で得られたいくつかの成果を解説することである．紙数の関係上多くを述べることはできないので，テーマを絞って，インスタントン解や Yang–Mills 接続のモジュライ空間の局所構造に関する定理などについて解説を試みることにする．それ以外で特に言及しておきたい結果や研究の流れなどについては，巻末に主な参考文献をあげながら概略の説明をつけることにした．

本書の構成は次のようになっている．第1章は全体の準備としての章であり，ここでは多様体，微分幾何学および Lie 群に関する必要最小限の内容について述べる．微分幾何学や Lie 群に関しては，詳述すればいずれも一冊の書物

になるほどの内容があるので，ここではゲージ理論を目標としたショートコースをとらざるを得なかった．したがって，さらに詳しいことを望む場合は，巻末に示した文献等で調べて頂きたい．第2章は，主ファイバー束，随伴束，そしてゲージ変換群等についての解説である．第3章は，主ファイバー束上の接続と曲率形式を定義して，それに関連する諸性質を述べるのが目標である．ここでは，局所表示による接続の定義と主ファイバー束上の1-形式としてのEhresmann 接続の同値性についても論じる．第4章は Yang-Mills 接続の定義と，関連した自己双対接続，弱安定な Yang-Mills 接続についての基本的事項の解説である．第5章では $\boldsymbol{R}^n$ 上の Yang-Mills 汎関数有限の接続，漸近的平坦な接続，Yang-Mills-Higgs 場についての解説を行い，さらに Belavin, Polyakov, Schwartz, Tyupkin が与えたインスタントン解の4元数による記述を試みる．第6章では自己双対接続に同伴する楕円複体，スライスに関する命題等を準備して，自己双対接続のモジュライ空間の局所理論を扱う．

ゲージ理論は，数学と物理学の交錯する中で，いま著しい発展の途上にある．本書が，その道に踏み入ろうと志している方々のために，何らかの足がかりを提供することができたら幸いである．

本書が出版されるについては，本講座編集委員の赤摂也氏，並びに共立出版（株）の佐藤邦久氏に，万般にわたり大へんなご援助を頂いた．本書ができる過程で，筑波大学教授理学博士小寺武康氏は数々の貴重なご意見を寄せて下さり，また東京学芸大学助手理学博士田崎博之氏はたいへんな労力を注いで校正刷のチェックをして下さった．なお，編集校正の全段階で，共立出版（株）の安原勇氏に多大のお骨折りを頂いた．これらの方々の，温かい強力なお力添えに対して，心からの感謝を献げたい．

1986年6月

著者しるす

目　次

第1章　多様体と Lie 群

第2章　ファイバー束とゲージ変換

第3章　ファイバー束と接続

第4章 Yang–Mills 汎関数と Yang–Mills 接続

第5章 R^4 上の Yang–Mills 接続

第6章 楕円複体とモジュライ空間

第1章　多様体と Lie 群

1.1　多　様　体

多様体の概念は，曲線や曲面の概念の拡張と考えられる．曲線は，これを運動する点の軌道とみれば，時間 t というパラメータをもち，t の値によって点の位置がきまる．曲面は，二つのパラメータをもつ．例えば，北極と南極を除く地球上のどの地点も，緯度，経度という二つのパラメータで位置付けられる．n 次元の多様体とは，大雑把にいえば，どの点のまわりにも，各点を位置付ける n 個の座標がとれるものであるということができる．

定義 1.1.1　Hausdorff 空間 M に対して，M が開集合 $U, V, W, \cdots$ の和集合で表され，各 U について U から n 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ への1対1写像 x_U が存在して，次の条件をみたすとき，組 (U, x_U) の全体は M に**可微分構造**または，C^∞ 構造を与えるといい，可微分構造をもつ M のことを**可微分多様体**，または C^∞ **多様体**という．定義に用いた $\boldsymbol{R}^n$ の次元 n をこの多様体の次元といい，$\dim M$ で示す．

（i）　像 $x_U(U)$ は $\boldsymbol{R}^n$ の開集合であり，x_U は U から $x_U(U)$ への同相写像である．

（ii）　$U\cap V\neq\phi$ ならば，写像

$x_V\circ x_U^{-1}: x_U(U\cap V)\longrightarrow x_V(U\cap V)$

は，上への1対1 C^∞ 写像であり，この逆写像もそうである．

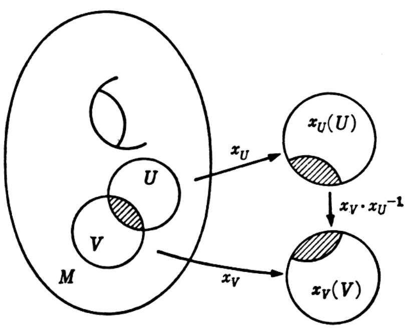


図 1.1　可微分構造を定める写像

以下，記述を簡単にするため，可微分の代わりに C^∞ を用いることにする．

例 1.　実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$，複素ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^n$，4元数ベクトル空間

H^n は，次元がそれぞれ n, $2n$, $4n$ の C^∞ 多様体である．

例 2. **(直積多様体)** m 次元 C^∞ 多様体 M と，n 次元 C^∞ 多様体 N の C^∞ 構造が，それぞれ $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in B}$ で定められているとする．このとき，直積空間 $M\times N$ の開集合 $U_\alpha\times V_\beta$ から $\boldsymbol{R}^{m+n}=\boldsymbol{R}^m\times\boldsymbol{R}^n$ への写像を

$$(\phi_\alpha\times\psi_\beta)(x,y)=(\phi_\alpha(x),\ \psi_\beta(y))$$

で定義すると，$\{(U_\alpha\times V_\beta),\ \phi_\alpha\times\psi_\beta\}_{(\alpha,\beta)\in A\times B}$ によって，$M\times N$ 上に C^∞ 構造が定められる．この C^∞ 構造をもつ多様体を M と N の直積多様体といい，これも $M\times N$ で表す．

例 3. **(n 次元球面)** n 次元球面 S^n は n 次元 C^∞ 多様体である．

$$S^n=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in\boldsymbol{R}^{n+1};\ \sum_{i=1}^{n+1}(x^i)^2=1\}$$

において，$1\leqq i\leqq n+1$ の各 i に対して

$$U_i^+=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in S^n; x^i>0\},\quad U_i^-=\{(x^1,\cdots,x^{n+1})\in S^n; x^i<0\}$$

とおき，$x_i^+: U_i^+\longrightarrow\boldsymbol{R}^n$, $x_i^-: U_i^-\longrightarrow\boldsymbol{R}^n$ を

$$x_i^\pm(x^1,\cdots,x^{n+1})=(x^1,\cdots,x^{i-1},\ x^{i+1},\cdots,x^{n+1})$$

で定義する．このとき，x_i^+, x_i^- の像はともに $\boldsymbol{R}^n$ の開球

$$B=\{(x^1,\cdots,x^n)\in\boldsymbol{R}^n;\ (x^1)^2+\cdots+(x^n)^2<1\}$$

である．$x_i^\pm$ は1対1写像で，その逆写像 $(x_i^\pm)^{-1}$ は

$$(x_i^\pm)^{-1}(x^1,\cdots,x^n)=(x^1,\cdots,x^{i-1},\pm\sqrt{1-\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2},x^i,\cdots,x^n)$$

である．このように定義した族

$$\{(U_i^+,x_i^+),\ (U_i^-,x_i^-)\}_{1\leq i\leq n+1}$$

が S^n 上に C^∞ 構造を定めることは，容易に確かめられる．

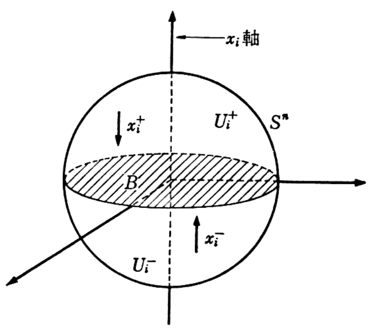


図 1.2　半球面と開球の対応

例 4. **(射影空間)** K は実数体 $\boldsymbol{R}$, または複素数体 $\boldsymbol{C}$ を表すものとする．$n+1$ 次元ベクトル空間 K^{n+1} における，零でない二つのベクトル

$$x=(x^0, x^1, \cdots, x^n), \qquad y=(y^0, y^1, \cdots, y^n)$$

に対して，K の元 α があって

$$y=\alpha x \quad \text{すなわち,} \ y_i=\alpha x_i \ (0\leqq i\leqq n)$$

となるとき，$x\sim y$ と書くことにすると，$\sim$ は $K^{n+1}\setminus\{0\}$ における同値関係である．x を含む同値類を $[x]$ と書き，同値類全体からなる集合を $P^n(K)$ で表す．

$P^n(K)$ は，$K=R$ のとき n 次元**実射影空間**，$K=C$ のとき n 次元**複素射影空間**という．**4 元数射影空間** $P^n(H)$ も同様に定義される．

$P^n(K)$ の C^∞ 構造は，次のようにして定義される．

まず，$\pi: K^{n+1}\setminus\{0\} \longrightarrow P^n(K); x \longmapsto [x]$ を標準的射影とし，$P^n(K)$ の位相を商空間の位相によって定義する．すなわち，$W\subset P^n(K)$ が開集合であるとは，逆像 $\pi^{-1}(W)$ が $K^{n+1}\setminus\{0\}$ の中で開集合であることとする．

さらに，開集合 $U_i=\{[(x^0, \cdots, x^n)]\in P^n(K); x^i\neq 0\}$ $(0\leqq i\leqq n)$ に対して，写像　$x_i: U_i \longrightarrow K^n$ を次のように定める．

$$x_i([(x^0, \cdots, x^n)])=(x^0/x^i,\ x^1/x^i, \cdots,\ \widehat{x^i/x^i}, \cdots,\ x^n/x^i)$$

（右辺で，記号$\wedge$は，この項は含まないことを意味する．）このようにすると，$\{(U_i, x_i)\}_{0\leq i\leq n}$ は $P^n(K)$ に C^∞ 構造を定める．$P^n(R)$ は n 次元，$P^n(C)$ は $2n$ 次元，$P^n(H)$ は $4n$ 次元の C^∞ 多様体である．

例 5.　C^∞ 多様体の任意の開集合 U は，自然に C^∞ 多様体となる．

C^∞ 多様体 M の開集合 W と，W から R^n への写像 ϕ があって，次の条件をみたすとき，(W, ϕ) を M の**座標近傍**という．

（i）　$\phi: W \longrightarrow \phi(W)$ は同相写像である．

（ii）　M 上の C^∞ 構造を $\{(U, x_U)\}$ とするとき，$W\cap U\neq\phi$ なる任意の U に対して，R^n における写像

$$x_U\circ\phi^{-1}: \phi(W\cap U) \longrightarrow x_U(W\cap U)$$

および，その逆写像は C^∞ 写像である．

この定義のもとで，C^∞ 構造を定める各 (U, x_U) 自身も座標近傍である．また，座標近傍 (U, x_U) に対して，U の開部分集合と，そこへの x_U の制限の組

もまた座標近傍となる．さらに，$p\in U$に対して，$\boldsymbol{R}^n$の点$x_U(p)$を，$\boldsymbol{R}^n$の座標を定める関数$(x^1, x^2, \cdots, x^n)$を用いて

$$x_U(p)=(x^1(p), x^2(p), \cdots, x^n(p))$$

と表し，(U, x_U)を$(U, x^1, x^2, \cdots, x^n)$と表すことがある．$x^1, x^2, \cdots, x^n$を**局所座標系**という．多様体の元も点といい，pまたはxで表す．

定義 1.1.2　M, NはC^∞多様体とする．写像$f: M\longrightarrow N$は，次の条件をみたすときC^∞写像という．

Mの座標近傍(U, x_U)と，Nの座標近傍(V, y_V)を任意にとったとき，$V\cap f(U)\neq\phi$ならば，写像

$$y_V\circ f\circ x_U^{-1}: x_U(U)\longrightarrow y_V(V)$$

は，$\boldsymbol{R}^m$の開集合から$\boldsymbol{R}^n$の開集合へのC^∞写像である．

写像　$f: M\longrightarrow N$　が，1対1で上へのC^∞写像であり，逆写像f^{-1}もC^∞写像であるとき，fは**微分同相写像**または，MとNの間の**微分同相**であるという．また，微分同相写像が存在するとき，MとNは**微分同相**であるといわれる．

例 6.　3次元球面S^3と，特殊ユニタリ群

$$SU(2)=\{2\text{次の複素正方行列 } X; X{}^t\bar{X}=1,\ \det X=1\}$$

は微分同相である．ただし，${}^t\bar{X}$は$\bar{X}$の転置行列である．

例 7.　**(立体射影)**　n次元球面S^nの南極 $\mathrm{S}(0, \cdots, 0, -1)$における接平面を$n$次元実ベクトル空間$\boldsymbol{R}^n=\{(\xi^1, \cdots, \xi^n); \ \xi^i\in\boldsymbol{R},\ (i=1, 2, \cdots, n)\}$と同一視する．北極$(0, \cdots, 0, +1)$を N として，写像$\pi: S^n\setminus\{\mathrm{N}\}\longrightarrow\boldsymbol{R}^n$を次のように定義する．

$S^n\setminus\{\mathrm{N}\}\ni x$に対して，

$$\pi(x)=(\mathrm{N}\text{ と }x\text{ を結ぶ直線})\cap\boldsymbol{R}^n$$

このようにして定義された写像πを立体射影という．

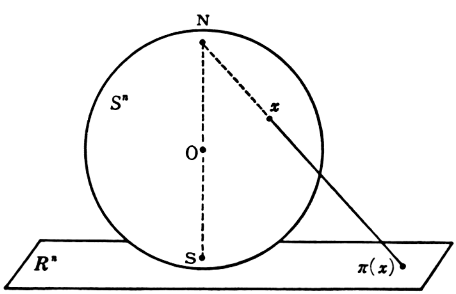


図 1.3　立体射影

$x=(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^{n+1})\in S^n$に対

して $\pi(x)=(\xi^1, \xi^2, \cdots, \xi^n)\in \boldsymbol{R}^n$ とすると $\xi^i=2x^i/1-x^{n+1}$ $(1\leqq i\leqq n)$ であって，π は C^∞ 写像である．

例 8. C^∞ 多様体 M から，実数 $\boldsymbol{R}$ への C^∞ 写像 $f: M\longrightarrow \boldsymbol{R}$ は，M 上の C^∞ 実数値関数とよばれる．$\boldsymbol{R}$ の代わりに $\boldsymbol{C}$ をとれば，同様に M 上の C^∞ 複素数値関数が定義される．C^∞ 実数値関数全体の集合を $C^\infty(M)$，C^∞ 複素数値関数全体の集合を $C_{\boldsymbol{C}}{}^\infty(M)$ で表す．

3次元ユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^3$ における曲面の，接線，接平面の考えを抽象化して，C^∞ 多様体の接ベクトル，接空間が定義される．

$\boldsymbol{R}$ の開区間 (a,b) から C^∞ 多様体 M への C^∞ 写像

$$c: (a,b)\longrightarrow M$$

を M 上の**曲線**という．M 上の点 p に対して，$c(t_0)=p$ なる $t_0\in(a,b)$ が存在するとき，c は p を通るという．p を通る曲線を考えるときは，簡単のために (a,b) は $0\in\boldsymbol{R}$ を含む区間とし，$t_0=0$，したがって $c(0)=p$ であるとする．

p を通る二つの曲線 c_1 と c_2 に対して，点 p のまわりの座標近傍 (U,x_U) において，$(x_U\circ c_1)'(0)=(x_U\circ c_2)'(0)$ であるとき，c_1 と c_2 は同値であると定義する．この定義によって定まる，p を通る曲線 c の同値類を $c'(0)$ または $\left.\dfrac{d}{dt}c(t)\right|_{t=0}$ で表し，p における**接ベクトル**という．p を通る曲線の同値類の全体を T_pM で表すと，T_pM は自然に実ベクトル空間の構造をもつ．この T_pM を，p における M の**接ベクトル空間**または，**接空間**という．

p の近傍で定義された C^∞ 関数 f に対して，接ベクトル $X_p\in T_pM$ にそっての微分係数 $X_p(f)$ を，$X_p(f)=(f\circ c)'(0)$ で定義する．ここに，$c(t)$ は p を通る曲線の同値類 X_p を代表する曲線である．

例 9. $(U, x^1, \cdots, x^n)$ を C^∞ 多様体 M の座標近傍とし，$p\in U$ に対して，$(x^1(p), \cdots, x^n(p))=(x_0^1, \cdots, x_0^n)$ とする．

p を通る曲線 $c_i(t)=(x_0^1, \cdots, x_0^{i-1}, x_0^i+t, x_0^{i+1}, \cdots, x_0^n)$ に対して，接ベクトル $c_i'(0)$ を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$ で表すと，$\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right)_p\right\}$ は，接空間 T_pM の基底である．

次に，C^∞ 多様体 M 上のベクトル場を定義しよう．

まず，$TM=\bigcup_{p\in M} T_pM$ とする．対応 $X: M \longrightarrow TM$ は，次の二つの条件をみたすとき，M 上の**ベクトル場**という．

（i）　任意の $p\in M$ に対して，$X(p)=X_p\in T_pM$

（ii）　任意の $f\in C^\infty(M)$ について，写像 $p\longmapsto X_p(f)$ は C^∞ 写像である．

M 上のベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ で表そう．

ベクトル場 X は，これを座標近傍 $(U, x^1, \cdots, x^n)$ に制限すると

$$X_p=\sum_{i=1}^n X^i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p,\quad X^i\in C^\infty(U)$$

と表される．もう一つの座標近傍 $(V, y^1, \cdots, y^n)$ で，$U\cap V\neq\phi$ なるものをとると，$U\cap V\ni p$ において，$1\leqq i\leqq n$ に対して

$$y^i(p)=y^i(x^1(p), \cdots, x^n(p)),\ \text{すなわち，}\ y^i=y^i(x^1, \cdots, x^n)$$

と書ける．X が $(V, y^1, \cdots, y^n)$ に関して

$$X=\sum_{i=1}^n {}'X^i\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right),\quad {}'X^i\in C^\infty(V)\quad 1\leqq i\leqq n$$

と表されたとすると，$U\cap V$ において，${}'X^i$，X^i の間には

$$(1.1.1)\qquad {}'X^i=\sum_{j=1}^n X^j\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$$

という関係がある．逆に，ベクトル場は，各座標近傍において定義された n 個の関数の系 $(X^1, X^2, \cdots, X^n)$ であって，局所座標系の変換に際し (1.1.1) の変換を受けるものである，と考えることができる．

$X, Y\in\mathfrak{X}(M)$，$f\in C^\infty(M)$ に対して

$$(1.1.2)\qquad [X, Y]_p(f)=X_p(Y(f))-Y_p(X(f))$$

と定義すれば，$[X, Y]\in\mathfrak{X}(M)$ であることが確かめられる．これを X, Y の**交換子積**という．

交換子積 $[\cdot,\cdot]$ には，次の性質がある．

$a, b\in \boldsymbol{R}$，$X, Y, Z\in\mathfrak{X}(M)$ とするとき

$$(1.1.3)\qquad [aX+bY, Z]=a[X, Z]+b[Y, Z]$$

$$(1.1.4)\qquad [X, Y]+[Y, X]=0$$

$$(1.1.5)\qquad [[X, Y], Z]+[[Y, Z], X]+[[Z, X], Y]=0$$

(Jacobi の恒等式)

ベクトル場 X が**完備**であるというのは，任意の $p\in M$ に対して，p を通る

曲線 $c_p : \boldsymbol{R} \longrightarrow M$ で

$$c_p(0)=p,\ c_p'(t)=X_{c_p(t)},\ t\in\boldsymbol{R}$$

となるものが存在することである．この曲線 c_p を，X の**積分曲線**という．なお，$t\in\boldsymbol{R}$ に対して，写像

$$\varphi_t : M \longrightarrow M;\quad p \longmapsto c_p(t)$$

は，M の微分同相写像を定め

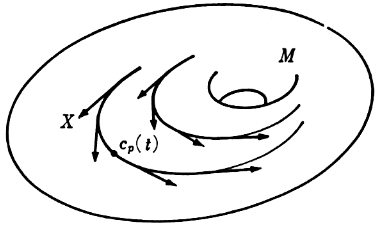


図 1.4　積分曲線

$$\varphi_s\circ\varphi_t(p)=\varphi_{s+t}(p)$$

をみたす．$\{\varphi_t; t\in\boldsymbol{R}\}$ は，X によって生成された，M 上の**1パラメータ変換群**とよばれ，$\{\varphi_t(p); t\in\boldsymbol{R}\}$ を p を通る**軌道**という．

問 1.　ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x^i}$，$1\leqq i\leqq n$ に対して，$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$，$0\leqq i,\ j\leqq n$ であることを示せ．

また，ベクトル場 $X=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，$Y=\sum_j Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$ に対して

$$[X, Y]=\sum_{i,j}\left(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

であることを示せ．

$p\in M$ における接ベクトル空間 T_pM に対して，p の近傍で定義された C^∞ 関数 f は，線形形式

$$T_pM \longrightarrow \boldsymbol{R};\quad X\longmapsto X(f)$$

を定める．この線形形式を $(df)_p$ で表し，p における f の**微分**という．これは，T_pM の双対ベクトル空間 T_pM^* の元である．T_pM^* を p における**余接空間**という．座標近傍 $(U, x^1, \cdots, x^n)$ において，T_pM の基底 $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$ に双対な T_pM^* の基底は，座標関数の微分 $(dx^1)_p, \cdots, (dx^n)_p$ で構成される．

ここで，前に定義したベクトル場に対応して，1-形式を定義しよう．

まず，$TM^*=\bigcup_{p\in M} T_pM^*$ とおく．対応 $\alpha : M \longrightarrow TM^*$ は，次の二つの条件をみたすとき，M 上の**1-形式**という．

（i）　任意の $p\in M$ に対して，$\alpha(p)=\alpha_p\in T_pM^*$

（ii）　任意の $X\in\mathfrak{X}(M)$ に対して，$\alpha(X)(p)=\alpha_p(X_p)$ で定義される M 上

の関数が C^∞ である.

C^∞ 多様体 M から N への C^∞ 写像 $f: M \longrightarrow N$ が与えられたとき, $p \in M$ を通る任意の曲線を $c(t)$, $c(0)=p$ として, p における f の微分 f_{*p} を

$$f_{*p}: T_pM \longrightarrow T_{f(p)}N;\ f_{*p}(c'(0)) = (f\circ c)'(0)$$

で定義する. f_{*p} はあきらかに線形写像である.

f_{*p} の像を $\mathrm{Im} f_{*p}$, 核を $\mathrm{Ker} f_{*p}$ とするとき, 各点 $p \in M$ で $\mathrm{Im} f_{*p} = T_{f(p)}N$ となるならば, f は**しずめ込み** (submersion) といい, $\mathrm{Ker} f_{*p} = \{0\}$ となるときは, **はめ込み** (immersion) という.

定義 1.1.3 (部分多様体) C^∞ 多様体 M と N に対して, 1対1の C^∞ 写像 $f: M \longrightarrow N$ で, はめ込みとなるものが存在するとき, M は N の**部分多様体**であるという. このとき, f を**埋め込み** (imbedding) という.

例 10. $f_1, f_2, \cdots, f_r$ を $\boldsymbol{R}^n (r<n)$ における r 個の C^∞ 関数とする. これに対して, $M = \{x \in \boldsymbol{R}^n; f_1(x) = \cdots = f_r(x) = 0\}$ の各点において $\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x^i}\right)_{\substack{1\le j\le r \\ 1\le i\le n}}$ の階数が r ならば, M は $\boldsymbol{R}^n$ の $n-r$ 次元部分多様体である ([1] 第1章, 1.1).

ベクトル場, 1-形式を一般化して, テンソル場の定義をしよう.

C^∞ 多様体 M 上の点を p とする. 多重線形形式

$$t: \underbrace{T_pM^* \times \cdots \times T_pM^*}_{r\ 個} \times \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{s\ 個} \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

を, 接空間 T_pM 上の**タイプ** (r, s) の**テンソル**という.

T_pM 上のタイプ (r, s) のテンソル全体を $T^{r,s}(T_pM)$ で表す. $T^{r,s}(T_pM)$ は n^{r+s} 次元ベクトル空間である.

なお, テンソルには, テンソル積という演算がある. タイプ (r_1, s_1) のテンソル T_1 と, タイプ (r_2, s_2) のテンソル T_2 に対して, **テンソル積**とよばれるタイプ $(r_1+r_2,\ s_1+s_2)$ のテンソル $T_1 \otimes T_2$ が次の式で定義される.

$$T_1 \otimes T_2(u_1, \cdots, u_{r_1+r_2},\ v_1, \cdots, v_{s_1+s_2})$$
$$= T_1(u_1, \cdots, u_{r_1}, v_1, \cdots, v_{s_1}) \cdot T_2(u_{r_1+1}, \cdots, u_{r_1+r_2}, v_{s_1+1}, \cdots, v_{s_1+s_2})$$

テンソル積について, 次の等式が成り立つことは容易に確かめられる.

T_1, T_2, T_3 を任意のテンソル, また $a, b \in \boldsymbol{R}$ として

$$(aT_1+bT_2)\otimes T_3=a(T_1\otimes T_3)+b(T_2\otimes T_3)$$
$$T_3\otimes(aT_1+bT_2)=a(T_3\otimes T_1)+b(T_3\otimes T_2)$$
$$T_1\otimes(T_2\otimes T_3)=(T_1\otimes T_2)\otimes T_3$$

テンソル場を定義するために，まず

$$T^{r,s}(M)=\bigcup_{p\in M}T^{r,s}(T_pM)$$

とおく．定義により

$$TM=T^{1,0}(M),\ TM^*=T^{0,1}(M)$$

であり，M からこれらへの写像としてベクトル場と 1-形式が定義された．それと同様に，写像

$$S:M\longrightarrow T^{r,s}(M)$$

が，次の二つの条件をみたすとき，S を M 上のタイプ (r,s) の**テンソル場**という．

（i） 任意の $p\in M$ に対して，$S(p)=S_p\in T^{r,s}(T_pM)$

（ii） M 上の任意の 1-形式 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ および，任意のベクトル場 $X_1,\cdots,X_s$ に対して

$$S(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,X_1,\cdots,X_s)(p)=S_p(\alpha_{1p},\cdots,\alpha_{rp},X_{1p},\cdots,X_{sp})$$

で定義される M 上の関数が C^∞ である．

タイプ (r,s) のテンソル場全体から成る空間を $\mathcal{T}^{r,s}(M)$ で表す．$\mathcal{T}^{r,s}(M)$ は $C^\infty(M)$-加群の構造をもつ．

また，例えば，タイプ $(1,2)$ のテンソル場 S は，座標近傍 $(U,x^1,\cdots,x^n)$ において

$$S=\sum S^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\otimes dx^k;\quad S^i_{jk}=S\left(dx^i,\frac{\partial}{\partial x^j},\ \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\in C^\infty(U)$$

と書ける．このように，$(U,x^1,\cdots,x^n)$ において，基底$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$，$\{dx^j\}$ を用いて表した表示を，一般にテンソルの**局所表示**という．

例 11. C^∞ 多様体 M 上のタイプ $(1,1)$ のテンソル場 $J=\sum J^i_j\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j$ は，各 $p\in M$ において T_pM の線形変換とみることができる．

特に，線形変換とみて，J が

$$J_p^2=-1_p\quad(1_p\text{ は }T_pM\text{ の恒等変換})$$

をみたすとき，JをMの**概複素構造**という．このJは$\mathfrak{X}(M)$から$\mathfrak{X}(M)$への$C^\infty(M)$-線形写像

$$X=\sum X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\longmapsto J(X)=\sum J_j{}^iX^j\frac{\partial}{\partial x^i}$$

とも考えられる．

また，$X, Y\in\mathfrak{X}(M)$に対して

(1.1.6) $N(X, Y)=J([X, Y])-[JX, Y]-[X, JY]-J[JX, JY]$

とおくと，任意の$f, g\in C^\infty(M)$に対して

$$N(fX, gY)=fgN(X, Y)$$

となる．Nは双線形写像$\mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M)\longrightarrow\mathfrak{X}(M)$である．このことから，$N$は$M$上のタイプ(1,2)のテンソル場とみることができる([1]，p. 165)．NをJから定まる**Nijenhuis テンソル**という．

特に$N=0$のとき，Jは**可積分**であるといい，可積分概複素構造Jをもつ多様体Mを**複素多様体**という([1]，第5章，5.1)．

問 2. $f, g\in C^\infty(M)$として，次の等式を証明せよ．

$$N(fX, gY)=fgN(X, Y)$$

1.2 微分形式

多様体上の積分や，このあと第3章における接続や曲率形式を記述する上で重要な，微分形式について述べよう．微分形式はいろいろなところで利用されるが，例えば電磁気学にあらわれる電場，磁場も，微分形式を用いると統一的に表現される．

Mをn次元C^∞多様体とし，その接空間上の交代形式の定義から始める．

定義 1.2.1 (交代形式) $k\geqq 1$として，T_pM上のk重線形形式

$$\omega : \underbrace{T_pM\times\cdots\times T_pM}_{k\text{ 個}}\longrightarrow \boldsymbol{R}$$

は，次の条件をみたすとき，T_pM上のk次交代形式という．

S_kを$\{1, 2, \cdots, k\}$の置換全体の集合，$\mathrm{sgn}(\sigma)$を$\sigma\in S_k$の符号とするとき，任意の$u_1, \cdots, u_k\in T_pM$，$\sigma\in S_p$に対して

(1.2.1) $$\omega(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(k)})=\mathrm{sgn}(\sigma)\omega(u_1, \cdots, u_k)$$

である．

$k=0$ のとき，すなわち 0 次交代形式は $\boldsymbol{R}$ の元であるとして，T_pM 上の k 次交代形式全体の集合を $\Lambda^k(T_pM)$ で表す．あきらかに，$k>n$ のときはすべて $\Lambda^k(T_pM)=\{0\}$ である．$\Lambda^k(T_pM)$ は $\binom{n}{k}$ 次元のベクトル空間である．

k 次交代形式 ω と，l 次交代形式 η との外積 $\omega\wedge\eta$ は，次のように定義される $k+l$ 次交代形式である．

(1.2.2) $(\omega\wedge\eta)(u_1,\cdots,u_{k+l})$

$$=\frac{1}{k!\,l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}\operatorname{sgn}(\sigma)\omega(u_{\sigma(1)},\cdots,u_{\sigma(k)})\eta(u_{\sigma(k+1)},\cdots,u_{\sigma(k+l)})$$

ここに，$u_i\in T_pM$，$1\leqq i\leqq k+l$．

定義 1.2.2 $\Lambda^k(M)=\bigcup_{p\in M}\Lambda^k(T_pM)$ とおく．M 上のタイプ $(0,k)$ のテンソル場 ω は

$$\omega: M\longrightarrow\Lambda^k(M);\ p\longmapsto\omega(p)=\omega_p\in\Lambda^k(T_pM)$$

であるとき，M 上の **k-形式**であるという．すなわち，ω が M 上の k-形式であるとは，タイプ $(0,k)$ のテンソル場で，しかも $\omega(p)$ が T_pM の k 次交代形式であるということである．

M 上の k-形式全体から成る空間を $\Omega^k(M)$ で表す．ただし，$0\leqq k\leqq n$ であり，$\Omega^0(M)=C^\infty(M)$ とする．

M 上の k-形式 ω と，l-形式 η に対して，外積 $\omega\wedge\eta\in\Omega^{k+l}(M)$ は

(1.2.3) $$(\omega\wedge\eta)_p=\omega_p\wedge\eta_p$$

で定義される．外積

$$\wedge:\Omega^k(M)\times\Omega^l(M)\longrightarrow\Omega^{k+l}(M)$$

は，次の等式をみたす．

(1.2.4) $$\omega\wedge\eta=(-1)^{kl}\eta\wedge\omega;\ \omega\in\Omega^k(M),\ \eta\in\Omega^l(M)$$

(1.2.5) $$f(\omega\wedge\eta)=(f\omega)\wedge\eta=\omega\wedge(f\eta);\ f\in C^\infty(M)$$

(1.2.6) $$\omega\wedge(\eta+\zeta)=\omega\wedge\eta+\omega\wedge\zeta$$

$$(\eta+\zeta)\wedge\omega=\eta\wedge\omega+\zeta\wedge\omega \quad (\text{分配法則})$$

(1.2.7) $$(\omega\wedge\eta)\wedge\zeta=\omega\wedge(\eta\wedge\zeta) \quad (\text{結合法則})$$

M 上で座標近傍 $(U,x^1,\cdots,x^n)$ をとれば，$\omega\in\Omega^k(U)$ は次のように局所表示ができる．

$$(1.2.8) \qquad \omega=\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\omega_{i_1,\cdots,i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$
$$=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\omega_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

ここに，$\omega_{i_1\cdots i_k}=\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right)\in C^\infty(U)$ である．

各 $p\in M$ に対して，$dx_p^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_p^{i_k}$，$1\leqq i_1<\cdots<i_k\leqq n$ は，$\Lambda^k(T_pM)$ の基底となっている．

C^∞ 多様体上の C^∞ 関数 f に対して，微分 df は 1-形式であるが，この微分 d は，写像

$$d: C^\infty(M)=\Omega^0(M)\longrightarrow\Omega^1(M)$$

とみられる．これの拡張として，**外微分**

$$d: \Omega^k(M)\longrightarrow\Omega^{k+1}(M)$$

が次のように定義される．d を**外微分作用素**ともいう．

見やすくするために，これを座標近傍 $(U, x^1, \cdots, x^n)$ に関する局所表示で定義しよう．

$$\Omega^k(M)\ni\omega=\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k}\omega_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

に対して

$$(1.2.9) \qquad d\omega=\frac{1}{k!}\sum_{i_1\cdots i_k}d\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$
$$=\frac{1}{k!}\sum_{ii_1\cdots i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\omega_{i_1\cdots i_k}\right)dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

外微分 d は，座標系を用いないで次のように定義することもできる．

$\omega\in\Omega^k(M)$，$X_1,\cdots,X_{k+1}\in\mathfrak{X}(M)$ として

$$(1.2.10) \qquad d\omega(X_1,\cdots,X_{k+1})=\sum_i(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+1})$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k+1})$$

ここに，$\hat{X}_i$ は，この項を除くことを意味する．

問 3. （1） $\omega\in\Omega^1(M)$，X，$Y\in\mathfrak{X}(M)$ とするとき

$$(1.2.11) \qquad d\omega(X,Y)=X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X,Y])$$

（2） $\eta\in\Omega^2(M)$，$X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ とするとき

$$(1.2.12) \qquad d\eta(X,Y,Z)=X\eta(Y,Z)+Y\eta(Z,X)+Z\eta(X,Y)$$
$$-\{\eta([X,Y],Z)+\eta([Y,Z],X)+\eta([Z,X],Y)\}$$

これを証明せよ.

外微分と外積との関係については，次の等式がある.

$\omega \in \Omega^k(M)$，$\eta \in \Omega^l(M)$ に対して

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \tag{1.2.13}$$

また，外微分については，つねに

$$d \circ d = 0$$

であることも容易に確かめられる．これは簡単だが，外微分の重要な性質である.

注 1. d の作用により，次のような Ω^k の系列が得られる.

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow \Omega^{n-1}(M) \longrightarrow \Omega^n(M) \longrightarrow 0 \tag{1.2.14}$$

この系列は，**de Rham 複体**とよばれる.

C^∞ 写像 $f: M \longrightarrow N$ が与えられると，$\omega \in \Omega^k(N)$ に対して，$f^*\omega \in \Omega^k(M)$ が次のように定められる.

$$(f^*\omega)_p(u_1, \cdots, u_k) = \omega_{f(p)}(f_*u_1, \cdots, f_*u_k)$$
$$u_i \in T_pM, \quad 1 \leqq i \leqq k$$

この $f^*\omega$ を，ω の f による**ひきもどし**という.

線形写像 $f^*: \Omega^k(N) \longrightarrow \Omega^k(M)$ については次のことがいえる.

$$f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta) \tag{1.2.15}$$
$$df^*\omega = f^*d\omega$$

開集合 $U \subset M$ 上の k-形式 θ は，$d\theta = 0$ ならば**閉**，また，$\alpha \in \Omega^{k-1}(U)$ が存在して $\theta = d\alpha$ となるならば**完全**であるという．$d \circ d = 0$ であるから，完全形式は必然的に閉形式となる.

命題 1.2.3 (Poincaré の補題) θ は $\boldsymbol{R}^n$ 上の k-形式 ($k > 0$) で，$d\theta = 0$ とする．このとき，$\boldsymbol{R}^n$ 上には $\theta = d\alpha$ となる $(k-1)$-形式 α が存在する（証明は，[2] 第3章，§6参照）.

$Z^k(M)$，$B^k(M)$ を，それぞれ C^∞ 多様体 M 上の閉 k-形式，完全 k-形式から成るベクトル空間とする．$B^k(M)$ は $Z^k(M)$ の部分ベクトル空間で，商空

間 $H^k(M)=Z^k(M)/B^k(M)$ を，M の k 次 **de Rham コホモロジー群**という．

問 4. ω を完全形式，θ を閉形式とするとき，$\omega\wedge\theta$ は完全形式であることを示せ．

さて，$\omega\in Z^k(M)$ に対して，それが属する $H^k(M)$ の元を $[\omega]$ と書くことにすれば，上の問により，$\theta\in Z^l(M)$ に対して，$[\omega]\wedge[\theta]$ を $[\omega\wedge\theta]$ で定義することができる．

それによって，コホモロジー群の直和

$$H^*(M)=H^0(M)\oplus H^1(M)\oplus\cdots\oplus H^n(M) \qquad (n=\dim M)$$

の上に，自然に外積が定義され，$H^*(M)$ は多元環の構造をもつことになる．

コンパクトな C^∞ 多様体 M に対しては，各 $H^k(M)$ は有限次元のベクトル空間となり，その次元は，位相空間としての M の k 次 **Betti 数** $b_k(M)$（整係数ホモロジー群 $H_k(M;\ \boldsymbol{Z})$ の自由加群部分の階数）に等しいことが知られている（[1]，第3章）．また，$\chi(M)=\sum(-1)^k b_k(M)$ を M の **Euler 標数**という．たとえば，$\chi(S^4)=2$，$\chi(P^2(\boldsymbol{C}))=3$ である．

1.3 向きと積分

定義 1.3.1 M を n 次元 C^∞ 多様体とする．M 上いたるところで0にならない C^∞ n-形式 ω が存在するとき，M は**向きづけ可能**であるといい，ω を M の**体積要素**，組 (M,ω) を**向きづけられた多様体**という．

ω を M の体積要素とするとき，M 上いたるところで0にならない任意の関数 $f\in C^\infty(M)$ に対して，$f\omega$ もまた M の体積要素となる．

$(U,\ x^1,\ \cdots,\ x^n)$ を M の局所座標系とする．$\Lambda^n(T_pM)$ は1次元のベクトル空間であるから，体積要素 ω と U 上の n-形式 $dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ とは，高々関数倍の違いである．体積要素 ω が

$$(1.3.1) \qquad \omega=a(p)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n,\ \ a(p)>0,\ \ p\in U$$

と書けるとき，$(U,x^1,\cdots,x^n)$ は正の座標系という．これに対し，U 上いたるところ $a(p)<0$ のときは，負の座標系という．

定理 1.3.2 C^∞ 多様体 M は向きづけ可能とする．このとき M 上では，その開被覆となる座標近傍系を，$U\cap V\neq\phi$ であるところのどの二つの座標近傍

$(U, x^1, \cdots, x^n)$，$(V, y^1, \cdots, y^n)$ についても，$U \cap V$ 上で関数行列式が

$$\det\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j}\right)_{1\leq i,j\leq n} > 0 \tag{1.3.2}$$

となるように選ぶことができる.

注 2. C^∞ 多様体 M がパラコンパクトのときは，この逆の命題も成り立つ（[2]，第5章 §1).

ここに，M が**パラコンパクト**であるとは，M の任意の開被覆に対して，その細分であり，しかも局所有限な開被覆が存在することをいう．M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に対して，M の開被覆 $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ がその**細分**であるとは，各 V_β が少なくとも一つの U_α に含まれているということである．また，開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が**局所有限**であるとは，M の各点 p が，$\{U_\alpha\}$ のうちの有限個のものとしか交わらない近傍をもつということである（[1]，第1章，1.4).

向きづけ可能でない多様体の例としては，**Möbius の帯**，2次元実射影空間 $P^2(\boldsymbol{R})$ などがある．右の図に示す **Klein のつぼ**も向きづけ可能でない2次元多様体の例である.

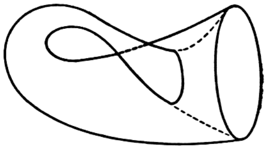


図 1.5 Klein のつぼ

例 12. 概複素構造をもつパラコンパクト C^∞ 多様体は向きづけ可能である.

例 13. Lie 群はすべて向きづけ可能である（1.10 参照).

向きづけられた n 次元 C^∞ 多様体 (M, ω) 上では，n-形式の積分や関数 f の積分が定義される.

まず，コンパクトな台をもつ連続な n-形式 θ の M 上の積分 $\int_M \theta$ を定義しよう．n-形式 θ の**台** $\mathrm{supp}(\theta)$ とは，$\{p\in M;\ \theta_p \neq 0\}$ の閉包 K のことである．コンパクトな台 K に対しては，有限個の正の座標系 $(U_i, x_i^1, \cdots, x_i^n)$，$1\leqq i\leqq k$ が存在して，$K\subset U_1\cup\cdots\cup U_k$ となる．ρ_i は U_i に従属する**1の分割**，すなわち $\rho_i\in C^\infty(M)$，$0\leqq\rho_i\leqq 1$，$\mathrm{supp}(\rho_i)\subset U_i$ であって，しかも $\sum_{i=1}^k \rho_i$ は K 上で恒

等的に1に等しいとする．これを用いて $\theta_i=\rho_i\theta$ とすると，$\mathrm{supp}(\theta_i)\subset U_i$ であるから，$\theta_i=a_i(p)dx_i^1\wedge\cdots\wedge dx_i^n$ の M 上の積分 $\int_M\theta_i$ を

$$\int_M\theta_i=\int_{x(U_i)}a_i(p)dx_i^1\cdots dx_i^n$$

と定義する．右辺の積分は普通の n 重積分である．これを用いて，θ の M 上の積分 $\int_M\theta$ を

$$\int_M\theta=\sum_{i=1}^k\int_M\theta_i$$

で定義すると，この積分は θ の台 K を覆う座標近傍のとり方に関係なく定義される．

台 $\mathrm{supp}(f)$ がコンパクトな連続関数 f に対して，n-形式 $f\omega$ の M 上の積分 $\int_M f\omega$ を，（体積要素 ω に関する）f の積分という．あきらかに

$$\int_M(af+bh)\omega=a\int_M f\omega+b\int_M h\omega\quad(a,b\in\boldsymbol{R},\ f,h\in C^\infty(M))\tag{1.3.3}$$

である．

問 5. $f\geqq0$ ならば，$\int_M f\omega\geqq0$ である．$f\geqq0$ かつ $\int_M f\omega=0$ ならば，$f=0$ である．これを証明せよ．

定理 1.3.3 (Stokes の定理) M を向きづけられた n 次元 C^∞ 多様体とすると，コンパクトな台をもつ $(n-1)$-形式 α に対して

$$\int_M d\alpha=0\tag{1.3.4}$$

である．

（証明は，[1] 第3章3.5参照）

この定理は，次の定理の系としてえられる．

定理 1.3.4 D を M の領域（連結な開集合）とし，D の境界を ∂D で表せば，$(n-1)$-形式 α に対して

$$\int_D d\alpha=\int_{\partial D}\alpha\tag{1.3.5}$$

である．

右辺の ∂D は M の向きづけに順応した向きづけをもつものとする．

D の境界 $\partial D=\bar{D}\backslash D$ の点を p とすると，D の正の座標近傍 $(U,x^1,\cdots,x^n)$

であって，$U\cap\bar{D}=\{q\in U; x^n(q)\geqq x^n(p)\}$ でありかつ，$(U\cap\partial D, x^1, \cdots, x^{n-1})$ が $p\in\partial D$ の座標近傍となるものがとれる．そこで，n が偶数ならば $(x^1, \cdots, x^{n-1})$ が正の座標系となり，n が奇数ならばこれが負の座標系となるように ∂D の向きをきめる．このように定めた ∂D の向きづけを，M の向きづけに**順応した向きづけ**という（[2] V，§5）．

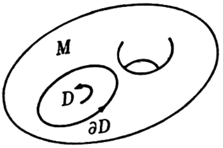


図 1.6 Stokes の定理

C^∞ 多様体 M 上のベクトル場の発散を定義しよう．

そのためにまず，k-形式のベクトル場に関する内部積を定義する．ベクトル場 X に対して，**内部積**とよばれる線形写像

$$i_X : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M)$$

は，次のように定められる．

$$(1.3.6)\quad \begin{cases} k\geqq 1 \text{ のとき} & (i_X\theta)(X_1, \cdots, X_{k-1})=\theta(X, X_1, \cdots, X_{k-1}) \\ k=0 \text{ のとき} & i_X\theta=0 \end{cases}$$

$i_X\theta$ を $X\lfloor\theta$ と書いている書物もある．

ω を M の体積要素とすると，$i_X\omega$ は $(n-1)$-形式であるから，$d(i_X\omega)$ は ω の関数倍である．その関数を $\operatorname{div} X$ と書けば

$$d(i_X\omega)=(\operatorname{div} X)\omega$$

である．このようにして定まる $\operatorname{div}X\in C^\infty(M)$ を，X の**発散**という．

Stokes の定理の応用として，次の定理も証明される．

定理 1.3.5 (Green の公式) 向きづけられた n 次元 C^∞ 多様体 (M, ω) 上の，コンパクトな台をもつベクトル場 X に対して

$$(1.3.7)\qquad \int_M (\operatorname{div} X)\omega=0$$

である．

例 14. M は，コンパクトかつ連結で，向きづけられた 4 次元 C^∞ 多様体とする．対称双線形形式

$$Q : H^2(M)\times H^2(M) \longrightarrow \boldsymbol{R};\ ([\alpha], [\beta]) \longmapsto \int_M \alpha\wedge\beta$$

は非退化である．すなわち，任意の $[\beta]\in H^2(M)$ に対して，$Q([\alpha], [\beta])=0$ ならば，$[\alpha]=0$ である．

Q の特性根のうち p 個が正，q 個が負のとき，(p,q) を Q の**指数**という．Q の指数 (p,q) に対して，$p-q$ を M の **Hirzebruch 符号数**（指数）といい，これを $\tau(M)$ で表す．M の向きを反対にすると τ の符号は変わる．

$\tau(S^4)=0$，$\tau(P^2(C))=1$ である．

M, N は同じ次元の，コンパクトで向きづけられた C^∞ 多様体とする．C^∞ 写像 $f: M \longrightarrow N$ に対して，N の点 q を，M の各点 $p \in f^{-1}(q)$ において f の関数行列式が零にならないような点，すなわち f の**正常値**とするとき

(1.3.8)
$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} [\det(f_*)_p \text{ の符号}]$$

を，f の**写像度**という．

写像度については，次の定理が知られている（[4] 第5章，第1節)．

定理 1.3.6　B^{n+1}，S^n をそれぞれ $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の中の半径1の球体，球面とする．すなわち，$B^{n+1}=\{p \in \boldsymbol{R}^{n+1}\,;\ |p| \leqq 1\}$，$S^n=\{p \in \boldsymbol{R}^{n+1}\,;\ |p|=1\}$．

(i)　C^∞ 写像 $f: S^n \longrightarrow S^n$ が，連続写像 $B^{n+1} \longrightarrow S^n$ に拡張できるための必要十分条件は，$\deg(f)=0$ である．

(ii)　$f, g: S^n \longrightarrow S^n$ が一方から他方へ連続的に変形できるための必要十分条件は，$\deg(f)=\deg(g)$ である．また，任意の整数 m に対して，m を写像度とする C^∞ 写像 $f: S^n \longrightarrow S^n$ が存在する．

1.4　Riemann 計量と Riemann 多様体

C^∞ 多様体上で，曲線の長さや，交わる2曲線のなす角が定義されるためには，接ベクトル空間に内積が定義されている必要がある．

定義 1.4.1　M を n 次元 C^∞ 多様体とする．M 上の **Riemann 計量**とは，タイプ (0,2) のテンソル場 $g \in \mathfrak{T}^{0,2}(M)$ であって，次の条件をみたすものをいう．

各点 $p \in M$ で，g_p は T_pM 上の対称な正定値双線形形式である．すなわち

(1)　$g_p(u,v)=g_p(v,u)$，$u, v \in T_pM$

(2)　$g_p(u,u) \geqq 0$；$g_p(u,u)=0$ となるのは，$u=0$ のときに限る．

Riemann 計量 g をもつ C^∞ 多様体 M を **Riemann 多様体**といい，組 (M,g)

で表す．座標近傍 $(U, x^1, \cdots, x^n)$ において，g は

$$g_p=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)dx^i\otimes dx^j \; ; \; g_{ij}(p)=g\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p\right)$$

と表される．ここで，$g_{ij}\in C^\infty(U)$ であり，正方行列 (g_{ij}) は正定値対称行列である．

Riemann 計量 g は，通常 $g=\sum g_{ij}dx^i dx^j$ のように表すことが多い．

C^∞ 多様体 M 上に，タイプ $(0,2)$ のテンソル場 $g\in\mathcal{T}^{0,2}(M)$ があって，各点 $p\in M$ で g_p が対称，かつ非退化である（すなわち，任意の $v\in T_pM$ に対して $g_p(u,v)=0$ ならば $u=0$ である）とき，g を M 上の**擬 Riemann 計量**という．また，(M,g) を**擬 Riemann 多様体**という．

注 3. 擬 Riemann 計量 g の指数 (s,t) は，点 $p\in M$ によらず一定である．ここに，対称行列 g の**指数**が (s,t) であるとは，その特性根の正のものは s 個，負のものは t 個ということである．これを符号数ともいう．

指数が $(n-1,\ 1)$ または $(1,\ n-1)$ である擬 Riemann 計量 g を **Lorentz 計量**，Lorentz 計量をもつ多様体を，**Lorentz 多様体**という．

例 15. $g_0=(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2$ は，n 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ 上の Riemann 計量を与える．g_0 を Euclid 計量，$(\boldsymbol{R}^n, g_0)$ を Euclid 空間という．

$\boldsymbol{R}^4$ 上の Lorentz 計量 $g_{\text{Min}}=(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2-(dx^4)^2$ を **Minkowski 計量**という。$(\boldsymbol{R}^4, g_{\text{Min}})$ は **Minkowski 空間**とよばれている．

例 16. n 次元球面 S^n は，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分多様体で，接空間 T_pS^n は $T_p\boldsymbol{R}^{n+1}$ の部分ベクトル空間である．したがって，Euclid 計量 g_0 を S^n 上に制限して，S^n 上の Riemann 計量 $\bar{g}$ が得られる．これを S^n 上の**標準計量**という．

Riemann 多様体 (M, g) 上の曲線 $c:(a, b)\longrightarrow M$ に対して，長さ $L(c)$ は，次の積分で定義される．

(1.4.1) $$L(c)=\int_a^b \{g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))\}^{\frac{1}{2}}dt$$

Riemann 多様体 (M,g), (N,h) に対して，微分同相写像 $f:M\longrightarrow N$ は

$$f^*h=g$$

すなわち, $g_p(u,v)=h_{f(p)}(f_*u,f_*v)$, $u,v\in T_pM$, $p\in M$

のとき**等長写像**という. また

$$f^*h=ag$$

なる正値関数 $a\in C^\infty(M)$ が存在するとき, **共形写像**という.

特に, $f: M\longrightarrow M$ のときは, 等長写像, 共形写像をそれぞれ**等長変換**, **共形変換**という.

例 17. 立体射影 (1.1 例 7) $\pi: S^m\backslash\{\mathrm{N}\}\longrightarrow \boldsymbol{R}^m$ は, S^m 上で標準計量, $\boldsymbol{R}^m$ 上で Euclid 計量を用いれば共形写像である.

実際, π は

$$\pi(p)=(\xi^1,\cdots,\xi^m),\ \ \xi^i=\frac{2x^i}{1-x^{m+1}};\ 1\leqq i\leqq m,\ \ p=(x^1,\cdots,x^{m+1})$$

で与えられるから

$$\pi^*\left(\sum_{i=1}^m(d\xi^i)^2\right)=4\left\{\frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^m(dx^i)^2+\frac{2}{a^3}\left(\sum_{i=1}^m x^idx^i\right)dx^{m+1}+\frac{1}{a^4}\sum_{i=1}^m(x^i)^2(dx^{m+1})^2\right\}$$

ここに, $a=1-x^{m+1}$ である. 一方

$$\sum_{i=1}^{m+1}(x^i)^2=1 \quad \text{であるから} \quad \sum_{i=1}^m x^idx^i=-x^{m+1}dx^{m+1}$$

したがって

$$\pi^*\sum_{i=1}^m(d\xi^i)^2=\frac{4}{a^2}\sum_{i=1}^{m+1}(dx^i)^2$$

ただし, 右辺の $\sum_{i=1}^{m+1}(dx^i)^2$ は Euclid 計量の S^m 上の制限, すなわち S^m 上の標準計量である.

(M,g) を向きづけられた Riemann 多様体とする. M を正の座標近傍系で覆い, その座標近傍 $(U,x^1,\cdots,x^n)$ において, $g=\sum g_{ij}dx^idx^j$ と表されるとすると

$$|g|=\det(g_{ij});\ \ \omega=\sqrt{|g|}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

によって, n-形式 ω が定義される. この ω を (M,g) の**体積要素**という. ω

は dv と書くこともある.

(M, g) では，k-形式の空間 $\Omega^k(M)$ における内積や，Hodge 作用素，余微分作用素などを定義することができる.

まず，$\Lambda^k(T_pM)$ での内積 $(\cdot,\cdot)$ と，Hodge 作用素 $*$ を定義する.

ベクトル空間 $V=T_pM$ には，g_p によって正定値内積 $g_p(u,v)$；$u, v\in V$ が定まるから，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ をその正規直交基底で，正の座標系 $(U, x^1,\cdots,x^n)$ に関して $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\dfrac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ と同じ向きを定めるものとする．すなわち

$$(e_i, e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases};\ 1\leqq i,\ j\leqq n$$

$$e_i=\sum_{j=1}^n a_i{}^j\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p;\ 1\leqq i\leqq n$$

としたとき，$\det(a_i{}^j)>0$ であるものとする．上の式の中の δ_{ij} を Kronecker のデルタという.

また，$\{\omega^1,\cdots,\omega^n\}$ を $V^*=(T_pM)^*$ における，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ に関する双対基底とする．すなわち，$V^*\ni\omega^i$ は

$$\omega^i(e_j)=\delta_{ij};\ 1\leqq i,\ j\leqq n$$

をみたすものとする．この基底に関して，$\Lambda^k(V)\ni\theta,\eta$ が

$$\theta=\frac{1}{k!}\sum\theta_{i_1\cdots i_k}\,\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}$$

$$\eta=\frac{1}{k!}\sum\eta_{i_1\cdots i_k}\,\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_k}$$

($\theta_{i_1\cdots i_k}$，$\eta_{i_1\cdots i_k}$ は添字 $i_1,\cdots,i_k$ について交代的）と表されるとしたとき，θ と η の内積 (θ,η) を

$$(1.4.2)\qquad (\theta,\ \eta)=\frac{1}{k!}\sum_{i_1\cdots i_k=1}^n\theta_{i_1\cdots i_k}\eta_{i_1\cdots i_k}$$

で定義する.

定義 1.4.2 $\theta,\eta\in\Lambda^k(V)$ に対して

$$\theta\wedge*\eta=(\theta,\eta)\omega_p\quad(\omega\text{ は }M\text{ の体積要素})$$

と定義すると，$*$ は写像

$$*:\Lambda^k(V)\longrightarrow\Lambda^{n-k}(V)$$

である．この $*$ を **Hodge 作用素**という.

(M,g) の体積要素 $\omega=\sqrt{|g|}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ が $\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$ に一致すること，また，$\Lambda^k(V)$ 上の内積 $(\cdot,\cdot)$ および Hodge 作用素 $*$ が，正規直交基底 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ のとり方によらないことは容易に確かめられる．

なお，$*$ に関しては，次のことがいえる．

(1.4.3)　　$\Lambda^k(V)\ni\theta$ に対して　$*(*\theta)=(-1)^{k(n-k)}\theta$

したがって，k が偶数のときは

$$*\cdot*=*^2=1 \text{（恒等変換）}$$

である（[1] 第3章3.6参照）．

問 6.　$\theta,\eta\in\Lambda^k(V)$ のとき，次の等式を証明せよ．

$$(*\theta,*\eta)=(\theta,\eta)$$

例 18.　V が4次元のとき，$*:\Lambda^2(V)\longrightarrow\Lambda^2(V)$ は包合的で $*$ の固有値は ±1 である．$\Lambda^2(V)$ は固有空間

$$\Lambda^2_\pm(V)=\{\theta\in\Lambda^2(V)\,;\ *\theta=\pm\theta\}$$

に分解し，$\Lambda^2(V)=\Lambda^2_+(V)\oplus\Lambda^2_-(V)$ となる．

また，$*:\Lambda^2(V)\longrightarrow\Lambda^2(V)$ は共形的に不変，すなわち，内積をスカラー倍しても変わらない．このことは次のようにして確かめられる．

V の内積を $c(>0)$ 倍した内積 $(\cdot,\cdot)'=c(\cdot,\cdot)$ に関する Hodge 作用素を $*'$ で表し，$(\cdot,\cdot)$ に関する正規直交基底を $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ とすると，$(\cdot,\cdot)'$ に関する正規直交基底は $\left\{\frac{1}{\sqrt{c}}e_1,\ \frac{1}{\sqrt{c}}e_2,\ \frac{1}{\sqrt{c}}e_3,\ \frac{1}{\sqrt{c}}e_4\right\}$ となる．また，これらの双対基底を $\{\omega^1,\omega^2,\omega^3,\omega^4\}$ および $\{\omega^{1'},\omega^{2'},\omega^{3'},\omega^{4'}\}$ とすれば，$\omega^{i'}=\sqrt{c}\,\omega^i$ $(1\leqq i\leqq4)$ である．そして $(\cdot,\cdot)'$ に関する体積要素 ω' は

$$\omega'=\omega^{1'}\wedge\omega^{2'}\wedge\omega^{3'}\wedge\omega^{4'}=c^2\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega^4$$

となる．$*'$ は

$$\theta\wedge*'\eta=(\theta,\eta)'\omega'$$

で定義されるが，θ,η が2次の交代形式なので

$$(\theta,\eta)'=\frac{1}{c^2}(\theta,\eta),\quad\text{よって}\quad\theta\wedge*'\eta=\theta\wedge*\eta$$

すなわち，$*'=*$ である．

(M,g) の正の座標系 $(U,x^1,\cdots,x^n)$ において，Schmidt の直交化法を用いることによって，U 上の n 個のベクトル場 $e_1,\cdots,e_n$ で，各点 $p\in U$ では T_pM の正規直交基底となり，順序対 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ が M の向きを定めるようなものを選ぶことができる．

$\{\omega^1,\cdots,\omega^n\}$ を $\{e_1,\cdots,e_n\}$ の双対基底とするとき，$\Omega^k(M)\ni\alpha,\beta$ に対して

$$\alpha=\frac{1}{k!}\sum\alpha_{i_1\cdots i_k}(p)\,\omega_p^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_p^{i_k}$$
(1.4.4)
$$\beta=\frac{1}{k!}\sum\beta_{j_1\cdots j_k}(p)\,\omega_p^{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_p^{j_k}$$

とし，α,β の各点 p での内積 $p\longmapsto(\alpha,\beta)(p)$ を

(1.4.5)
$$(\alpha,\beta)(p)=\frac{1}{k!}\sum_{i_1\cdots i_p=1}^{n}\alpha_{i_1\cdots i_k}(p)\beta_{i_1\cdots i_k}(p)$$

で定義する．

例 19. 2-形式 α,β が，座標系 $(x^1,\cdots,x^n)$ に関して

(1.4.6)
$$\alpha=\frac{1}{2}\sum\alpha_{ij}dx^i\wedge dx^j,\quad \beta=\frac{1}{2}\sum\beta_{ij}dx^i\wedge dx^j$$
$$(\alpha_{ij}+\alpha_{ji}=0)\qquad\qquad(\beta_{ij}+\beta_{ji}=0)$$

と表されるときは，内積 (α,β) は

$$(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}\sum_{i,j,k,l}g^{ij}g^{kl}\alpha_{ik}\beta_{jl}$$

となる．ただし，(g^{ij}) は (g_{ij}) の逆行列とする．

定義 1.4.3 向きづけられた n 次元 Riemann 多様体 (M,g) においては，$\Omega^k(M)\ni\theta,\eta$ の**内積** (θ,η) を

(1.4.7)
$$(\theta,\eta)=\int_M(\theta,\eta)(p)\,\omega_M$$

で定義する．ここに，ω_M は (M,g) の体積要素である．

定義 1.4.4 Hodge 作用素 $*:\Omega^k(M)\longrightarrow\Omega^{n-k}(M)$ を $(*\theta)_p=*\theta_p$ で定義する．

作用素 $*$ の定義により，$\theta\in\Omega^k(M)$ のとき $*(*\theta)=(-1)^{k(n-k)}\theta$ である．

注 4. 計量 g が擬 Riemann 計量のときには，上の定義を少し修正する必要がある．この

場合は，M の体積要素を $\sqrt{|\det(g_{ij})|}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$ で与え，T_pM の正規直交基底とは，$g(e_i, e_j)=\pm\delta_{ij}$，$1\leqq i, j\leqq n$ をみたす $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ であるとする．$\Omega^k(M)$ 上の内積は，Riemann 計量を用いた場合と同様に定義できるが，それは不定値内積である．Hodge 作用素 $*$ も同様に定義されるが，この場合には

(1.4.8) $$*(*\theta)=(-1)^q(-1)^{k(n-k)}\theta,\quad \theta\in\Omega^k(M)$$

である．ただし，(p, q) は計量 g の指数である．

例 20.　Minkowski 空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_{\mathrm{Min}})$ 上では，$*: \Lambda^2(\boldsymbol{R}^4)\longrightarrow\Lambda^2(\boldsymbol{R}^4)$ に対して　$*\cdot*=-1$　である．

定義 1.4.5　(M, g) を向きづけられた n 次元 Riemann 多様体とする．線形作用素

$$\delta: \Omega^k(M)\longrightarrow\Omega^{k-1}(M)$$

を次のように定義する．

(1.4.9) $$\begin{aligned}&\delta f=0,\quad f\in C^\infty(M)=\Omega^0(M)\\&\delta\alpha=(-1)^{nk+n+1}*d*\alpha,\quad \alpha\in\Omega^k(M),\quad k\geqq 1\end{aligned}$$

この δ を**余微分作用素**という．

注 5.　擬 Riemann 多様体上では，δ を

$$\delta=(-1)^q(-1)^{nk+n+1}*d*$$

で定義する．

外微分作用素 d について $d^2=0$ であるから，余微分作用素 δ についても

$$\delta^2=0$$

である．Riemann 多様体 M 上では，$\Omega^k(M)$ に対して

(1.4.10) $$\begin{aligned}&*\delta=(-1)^k d*\\&*d=(-1)^{k+1}\delta*\end{aligned}$$

である．

命題 1.4.6　向きづけられた n 次元 Riemann 多様体 (M, g) において，微分形式 $\alpha\in\Omega^k(M)$，$\beta\in\Omega^{k+1}(M)$ は $(n-1)$-形式 $\alpha\wedge*\beta$ の台がコンパクトであるような任意の二つの微分形式とする．このとき，次の等式が成り立つ．

(1.4.11) $$(\alpha, \delta\beta) = (d\alpha, \beta)$$

(証明は [1] 第3章3.8を参照).

この命題は，余微分作用素 δ が，外微分作用素 d の形式的随伴作用素であることを示している.

定義 1.4.7 2階の微分作用素

$$\Delta = d\delta + \delta d : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(M)$$

を，Riemann 多様体 (M, g) の **Laplace 作用素**という. k-形式 θ が $\Delta\theta = 0$ をみたすとき，θ は**調和形式**であるという.

調和 k-形式全体の空間 $\boldsymbol{H}^k$ は，$\Omega^k(M)$ の部分ベクトル空間である. Laplace 作用素 Δ と Hodge 作用素 $*$ との間には

$$*\Delta = \Delta *$$

という関係があるので，$*$ は $\boldsymbol{H}^k$ から $\boldsymbol{H}^{n-k}$ の上への1対1写像である.

向きづけられた Riemann 多様体 (M, g) がコンパクトのときは，各 $\boldsymbol{H}^k$ は有限次元のベクトル空間となる ([1] 第3章3.8).

定理 1.4.8 (Hodge-de Rham-小平の分解定理)

向きづけられたコンパクト Riemann 多様体 (M, g) において，任意の微分形式 $\eta \in \Omega^k(M)$ $(1 \leqq k \leqq n = \dim M)$ は，次のように一意的に分解される.

(1.4.12) $$\eta = \xi + \zeta + \omega$$

$$\xi \in \boldsymbol{H}^k,\ \zeta \in \mathrm{Im}\, d = \{d\alpha;\ \alpha \in \Omega^{k-1}(M)\},\ \omega \in \mathrm{Im}\,\delta = \{\delta\beta;\ \beta \in \Omega^{k+1}(M)\}$$

(証明は，[1] 第3章3.8を参照).

この定理によって，k 次コホモロジー群 $H^k(M)$ は $\boldsymbol{H}^k$ と線形同形であり，$\dim \boldsymbol{H}^k$ は k 次 Betti 数に等しいことがわかる.

例 21. Euclid 空間 $(\boldsymbol{R}^n, g_0)$ では，Laplace 作用素 Δ は次のようになる.

$$\omega = \frac{1}{k!} \sum_{i_1 \cdots i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

に対して

(1.4.13) $$\Delta\omega = -\sum_{i_1 < \cdots < i_k} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \omega_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^j \partial x^j} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

1.5 Maxwell の電磁方程式

Minkowski 空間 $(\boldsymbol{R}^4, g_{\mathrm{Min}})$ では，慣習的に，$(t, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ としている．

時空 $\boldsymbol{R}^4$ 内に電荷と電流が連続的に分布しているとすると，これらの電荷と電流が時空の一点 p に及ぼす古典的な電気的力と磁気的力，すなわち電場と磁場は，Maxwell の電磁方程式によって規定される．電場 $\boldsymbol{E} = (E_1, E_2, E_3)$ および，磁場 $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ は，$\boldsymbol{R}^4$ で定義され $\boldsymbol{R}^3$ に値をとる関数で，次の 4 個の方程式をみたしている．

(1.5.1) $\quad \nabla \times \boldsymbol{E} + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0$ (Faraday の電磁誘導の法則)

(1.5.2) $\quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ (磁気モノポール(単極子)の非存在)

(1.5.3) $\quad \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$ (Gauss の法則)

(1.5.4) $\quad \nabla \times \boldsymbol{B} - \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{J}$ (Ampère の法則)

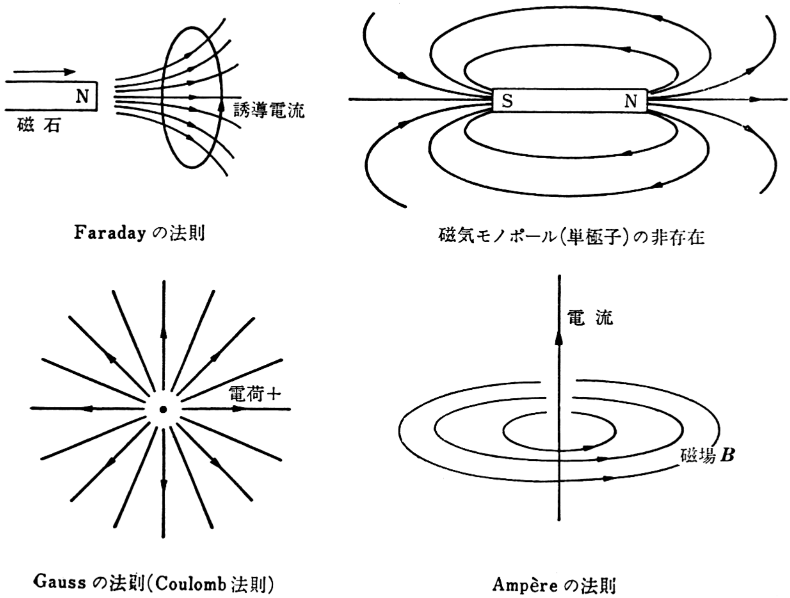


図 1.7 Maxwell の電磁方程式

ここに，

$\rho: \boldsymbol{R}^4 \longrightarrow \boldsymbol{R}$ は電荷密度，$\boldsymbol{J}: \boldsymbol{R}^4 \longrightarrow \boldsymbol{R}^3$ は電流密度

∇ はベクトル解析における微分演算子 $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ を表す．

電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ を一緒にした $\boldsymbol{R}^4$ 上の 2-形式

(1.5.5)
$$F=E_1 dx\wedge dt+E_2\, dy\wedge dt+E_3\, dz\wedge dt \\ +B_1 dy\wedge dz+B_2\, dz\wedge dx+B_3\, dx\wedge dy$$

を考えると，Maxwell の方程式は次の方程式に書き直すことができる．

(1.5.6)
$$dF=0$$

(1.5.7)
$$\delta F=j$$

ここに，$j=\rho dt-\boldsymbol{J}d\boldsymbol{r}$，$d\boldsymbol{r}=(dx, dy, dz)$，余微分作用素は Minkowski 計量に関するものである．

(1.5.6) は (1.5.1)，(1.5.2) に対応する方程式で，電荷・電流分布のいかんにかかわらず成り立つ恒等式である．(1.5.7) は (1.5.3)，(1.5.4) と同値な方程式である．

Poincaré の 補題 (1・2 節) により，$\boldsymbol{R}^4$ 上の 1-形式 A で $F=dA$ をみたすものが存在する．A はポテンシャルといわれ，これを用いると，(1.5.7) は

(1.5.8)
$$\delta dA=j$$

となる．ポテンシャル A の選び方には自由度があり，とくに $\delta A=0$ をみたすように A を選ぶこともできる．(このような A を選ぶことを，ゲージを固定して Lorentz [Coulomb] ゲージにするという．) このとき上式は

(1.5.9)
$$\Delta A=(\delta d+d\delta)A=j$$

と書ける．Minkowski 計量に関する Δ は d'Alembertian とよばれ

$$\Delta=-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

と表される．したがって，Maxwell の電磁方程式は，ポテンシャル A に関する双曲型偏微分方程式となる．

1.6 接続と共変微分

C^∞ 多様体 M 上の関数 $f\in C^\infty(M)$ を微分すると，1-形式すなわち，タイプ (0, 1) のテンソル df となる．M 上のテンソル場を解析するために，関数以外

のテンソル場に対しても微分演算を定めることが重要である．これから考える接続とか共変微分とかいわれるものは，テンソル場に対する拡張された微分演算を定めるものである．

定義 1.6.1 C^∞ 多様体 M 上の**アファイン接続**とは，写像

$$\nabla : \mathfrak{X}(M)\times\mathfrak{X}(M) \longmapsto \mathfrak{X}(M);\quad (X, Y)\longmapsto \nabla_X Y$$

であって，次の条件をみたすものである．

$X, Y, X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$，$f\in C^\infty(M)$ として

(1.6.1) $$\nabla_X(Y_1+Y_2)=\nabla_X Y_1+\nabla_X Y_2$$

$$\nabla_{(X_1+X_2)}Y=\nabla_{X_1}Y+\nabla_{X_2}Y \qquad (\text{双線形性})$$

(1.6.2) $$\nabla_{fX}Y=f\nabla_X Y$$

(1.6.3) $$\nabla_X(fY)=(Xf)Y+f\nabla_X Y \quad (\text{Leibniz 則})$$

座標系 $(U, x^1, \cdots, x^n)$ に関し，U 上の n^3 個の C^∞ 関数 Γ^k_{ij} $(1\leqq i, j, k\leqq n)$ が定義式

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_{k=1}^n \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

によって定められる．これを用いると，ベクトル場

$$X=\sum X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=\sum Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

に対して，$\nabla_X Y$ を (1.6.1)～(1.6.3) を用いて展開することによって

(1.6.4) $$\nabla_X Y=\sum_{i,j} X^i\nabla_i Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$$

と表される．ただし，ここで

$$\nabla_i Y^j=\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}+\sum_{k=1}^n \Gamma^j_{ik}Y^k \quad (1\leqq i, j\leqq n)$$

とおいた．n^3 個の関数 $\{\Gamma^k_{ij}\}$ を，アファイン接続 ∇ の $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ に関する**接続係数**という．

他の座標系 $(V, y^1, \cdots, y^n)$ に関する接続係数を $\{\bar\Gamma^k_{ij}\}$ とすれば，$U\cap V$ 上では次の変換公式が成り立つ．

(1.6.5) $$\bar\Gamma^k_{ij}=\sum_{a,b,c}\frac{\partial x^a}{\partial y^i}\frac{\partial x^b}{\partial y^j}\frac{\partial y^k}{\partial x^c}\Gamma^c_{ab}+\sum_a\frac{\partial^2 x^a}{\partial y^i\partial y^j}\frac{\partial y^k}{\partial x^a}$$

(1.6.2) によれば，$\nabla_X Y$ の $p\in M$ での値は X_p のみに依存するので，これを $\nabla_{X_p}Y$ と表し，Y の X_p 方向の**共変微分係数**という．

問 7. ∇, ∇' を M 上の二つのアファイン接続とすると，$(X, Y) \longmapsto \nabla_X{}'Y - \nabla_X Y$ は M上のタイプ (1,2) のテンソル場となることを，(1.6.5) を用いて示せ.

アファイン接続 ∇ に対して，タイプ (1,2) のテンソル

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M)$$

を ∇ の**捩率テンソル**という．$T=0$ のとき，接続 ∇ は**対称**であるという.

問 8. ∇ が対称であるための必要十分条件は

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} \quad (1 \leqq i, j, k \leqq n)$$

であることを示せ.

解説 ベクトル場を“微分”したとき，それがまたベクトル場になるためには，多様体上の無限に近い2点 p, q における量の間の変換を与える“規則”が定まっていなくてはならない．接続とはこの“規則”を与えるものである．まず，ベクトル場 $X = \sum_i X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ の普通の意味の微分を考えてみよう．それは

$$\frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x^j}\left\{X^i(x+\Delta x) - X^i(x)\right\} \tag{1.6.6}$$

である．右辺第2項は座標が $(x^1, \cdots, x^n)$ である点 p での値を表し，第1項は座標が $(x^1+\Delta x^1, \cdots, x^n+\Delta x^n)$ である点 p' での値を示している．それゆえ上式は，座標系の変換の際にテンソルの変換法則には従わない．この欠点を取り除くためには，p での量 $X^i(x)$ $(1 \leqq i \leqq n)$ をある定まった方法で，しかも座標系の選び方に関係なく点 p' に移動する必要がある．Euclid 空間ではそれは単なる平行移動で十分である.

そこで，平行移動した結果の量 $X^i(x+\Delta x)_{/\!/}$ $(1 \leqq i \leqq n)$ は

$$(X^i + Y^i)(x+\Delta x)_{/\!/} = X^i(x+\Delta x)_{/\!/} + Y^i(x+\Delta x)_{/\!/} \tag{1.6.7}$$

$$X^i(x+\Delta x)_{/\!/} - X^i(x) \text{ は } \Delta x \text{ に比例する}$$

という二つの条件をみたすものとしよう．すると，n^3 個の量 $\{\Gamma^i_{jk}(x)\}$ が定まって，$X^i(x+\Delta x)_{/\!/}$ は

$$X^i(x+\Delta x)_{/\!/} = X^i(x) - \sum_{j,k} X^k(x) \Gamma^i_{kj} \Delta x^j \tag{1.6.8}$$

と表される．もとの式 (1.6.6) の両辺に

$$(1.6.9)\qquad \sum_k X^k(x)\Gamma^i_{kj}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x^j}\sum_{k,t} X^k(x)\Gamma^i_{kt}(x)\Delta x^t$$

を加えると

$$(1.6.10)\qquad \frac{\partial X^i}{\partial x^j}(x)+\sum_k X^k(x)\Gamma^i_{kj}(x) =\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x^j}\{X^i(x+\Delta x)-X^i(x+\Delta x)_{/\!/}\}$$

となる．この右辺は同一の点 p' における二つの量の差であるから，テンソルの変換法則にしたがう．すなわち，(1.6.10) の左辺はタイプ (1,1) のテンソルとなる ([14] II 章)．

n 次元 Riemann 多様体 (M,g) 上のアファイン接続 ∇ を考えよう．

任意のベクトル場 $Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ と，任意のベクトル $u\in T_pM$ に対して，アファイン接続 ∇ が

$$(1.6.11)\qquad u(g(Y,Z))=g_p(\nabla_uY,Z_p)+g_p(Y_p,\nabla_uZ)$$

をみたすとき，∇ は Riemann 計量 g と**両立する**という．

定理 1.6.2 Riemann 多様体 (M,g) 上には，計量 g と両立する対称アファイン接続がただ一つ存在する (証明は [16] IV 章を参照)．

この接続を **Levi-Civita 接続**という．

上の定理は，擬 Riemann 多様体に対しても成り立つ．

問 9. Levi-Civita 接続の接続係数 Γ^k_{ij} は，計量 g の成分 g_{ij} および g^{ij}〔行列 (g_{ij}) の逆行列の成分〕を用いて

$$(1.6.12)\qquad \Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_l g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)$$

と表されることを示せ．

Levi-Civita 接続の接続係数は，通常 $\left\{ {k \atop ij} \right\}$ と書かれ，**Christoffel の記号**とよばれている．

例 22. Euclid 計量 g_0 については，$g_0\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta_{ij}$, $1\leqq i,j\leqq n$ であるから，(1.6.12) より $\left\{ {i \atop jk} \right\}=0$ である．したがって，Euclid 空間での Levi-Civita 接続 ∇ は，ベクトル場の普通の意味の微分である．

例 23. m次元球面 $S^m \subset \boldsymbol{R}^{m+1}$ の北極 $\mathrm{N}=(0,\cdots,0,1)$ のまわりでは，はじめの m 個の座標，$x^1,\cdots,x^m$ を S^m の座標として，x^{m+1} は $x^1,\cdots,x^m$ の C^∞ 関数とみることができる（1.1例3）．S^m 上の標準計量 $\bar{g}$ は $\boldsymbol{R}^{m+1}$ の Euclid 計量 g_0 を，埋め込み $f: S^m \longrightarrow \boldsymbol{R}^{m+1}$ によって S^m 上にひきもどしたものとして定義したから，$U=U^+_{m+1}$ 上で

$$\bar{g}_{ij}=\bar{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=g_0\left(f_*\frac{\partial}{\partial x^i},f_*\frac{\partial}{\partial x^j}\right),\quad 1\leqq i,j\leqq m$$

また，U 上では $f(x^1,\cdots,x^m)=(x^1,\cdots,x^m,\ x^{m+1}(x^1,\cdots,x^m))$ である．

したがって，
$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}-\frac{x^i}{x^{m+1}}\frac{\partial}{\partial x^{m+1}}$$

$$\bar{g}_{ij}=\delta_{ij}+\frac{1}{(x^{m+1})^2}x^ix^j \tag{1.6.13}$$

行列 $(\bar{g}_{ij})$ の逆行列の成分 $\bar{g}^{kl}$ は

$$\bar{g}^{kl}=\delta_{kl}-x^kx^l \tag{1.6.14}$$

となる．

一方，$\dfrac{\partial x^{m+1}}{\partial x^i}=-\dfrac{x^i}{x^{m+1}}$ であるから

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{g}_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial\bar{g}_{ik}}{\partial x^j}-\frac{\partial\bar{g}_{ij}}{\partial x^k}\right)=\frac{\partial^2x^{m+1}}{\partial x^i\partial x^j}\cdot\frac{\partial x^{m+1}}{\partial x^k} \tag{1.6.15}$$

よって，$\left\{\begin{matrix}k\\ij\end{matrix}\right\}$ は

$$\left\{\begin{matrix}k\\ij\end{matrix}\right\}=\sum\frac{\partial^2x^{m+1}}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial x^{m+1}}{\partial x^l}\bar{g}^{kl}=x^k\left(\delta_{ij}+\frac{x^ix^j}{(x^{m+1})^2}\right) \tag{1.6.16}$$

と書かれる（[3] 第5章）．

Riemann 多様体 (M,g) 上で，Levi-Civita 接続 ∇ に関する平行移動を定義しよう．（p. 29 解説参照）

曲線 $c:(a,b)\longrightarrow M$ に対して，c にそったベクトル場とは，ベクトル場 $(a,b)\ni t\longmapsto Y_t\in T_{c(t)}M$ であって，局所座標系に関しては，C^∞ 関数 η^i を用いて $Y_t=\sum\eta^i(t)\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)_{c(t)}$ と表されるものをいう．曲線 c の接ベクトル $\dot{c}(t)$ もその例である．c に沿ったベクトル場 Y が

$$\nabla_{\dot{c}(t)}Y=0,\quad t\in(a,b)$$

をみたすとき，Y は c に沿って**平行**であるという．$c(t)=(c^1(t),\cdots,c^n(t))$ とすれば，この条件は成分を用いて次のように表される．

(1.6.17) $$\frac{d\eta^i}{dt}+\sum_{j,k}\begin{Bmatrix} i \\ jk \end{Bmatrix}\frac{dc^j}{dt}\eta^k=0$$

とくに，曲線 c の接ベクトル $\dot{c}(t)$ が c に沿って平行であるとき，すなわち，$\nabla_{\dot{c}(t)}\dot{c}(t)=0$ のとき，c を**測地線**という．

連続曲線 $c:[0,1]\longrightarrow M$ に対して，$[0,1]$ の分割 $\{t_i\}_{0\leqq i\leqq k}$; $0=t_0<t_1<\cdots<t_{k-1}<t_k=1$ があり，各区間への制限 $c_{|[t_i,t_{i+1}]}:[t_i,t_{i+1}]\longrightarrow M$ が C^∞ 曲線であるとき，c は**区分的** C^∞ **曲線**であるという．区分的 C^∞ 曲線 c に沿ったベクトル場 $Y=\{Y_t\}$ は，各 $c_{|[t_i,t_{i+1}]}$ に沿って Y_t が平行であるとき，c に沿って平行であるという．

M 上の2点 p,q を結ぶ区分的 C^∞ 曲線 $c(t)$ $(t\in[0,1]$, $c(0)=p$, $c(1)=q)$ を一つ定めると，任意のベクトル $u\in T_pM$ に対して，c に沿って平行なベクトル場 $Y=\{Y_t\}$ で，$Y_0=u$ であるものがただ一つ存在することが，常微分方程式の解の一意性からわかる．この平行ベクトル場の $t=1$ のときの値，すなわち $Y_1\in T_qM$ は，$Y_0=u$ を c に沿って平行移動したベクトルであるという．

問 10. Y_t, Z_t を曲線 c に沿った平行ベクトル場とすると，c 上で $g_{c(t)}(Y_t, Z_t)$ は一定であることを示せ．

M 上の2点 p,q に対して，区分的 C^∞ 曲線 $c:[0,1]\longrightarrow M$ で，$c(0)=p$，かつ $c(1)=q$ なるものの全体を $C(p,q)$ と表す．とくに $C(p,p)$ は，p を出て p に帰る閉じた曲線の全体である．

$C(p,p)\ni c$ に沿って平行なベクトル場 Y_t は，$Y_0\in T_pM$ と $Y_1\in T_pM$ の対応を定めるから，各 c に対して変換

$$\tau_c: T_pM\longrightarrow T_pM \qquad c\in C(p,p)$$

が定義される．$\{\tau_c;\ c\in C(p,p)\}$ は T_pM の内積 $g_p(\cdot,\cdot)$ に関する直交変換群の部分群である．この群を Levi-Civita 接続に関する**ホロノミー群**という．

1.7　Riemann 曲率テンソル

定義 1.7.1 Riemann 多様体 (M,g) 上の Levi-Civita 接続 ∇ に対して，次の (1.7.1) で定義されるタイプ (1,3) のテンソル場 R を，**Riemann 曲率テンソル**という．

(1.7.1) $$R(X, Y, Z)=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z \qquad X, Y, Z\in\mathfrak{X}(M)$$

定義から，$f_1, f_2, f_3\in C^\infty(M)$ に対して

$$R(f_1X, f_2Y, f_3Z)=f_1f_2f_3R(X, Y, Z)$$

であることが容易に確かめられる．慣例にしたがって，これ以後 $R(X, Y, Z)$ を $R(X, Y)Z$ と書くことにする．

注 6. 一般にアファイン接続 ∇ に対して，(1.7.1) で Riemann 曲率テンソルが定義される．

問 11. $R(f_1X, f_2Y, f_3Z)=f_1f_2f_3R(X, Y, Z)$，$f_1, f_2, f_3\in C^\infty(M)$ を示せ．

Levi-Civita 接続を用いて，テンソル場の**共変微分**を定義しよう．

タイプ (0,1) のテンソル ω が，任意のベクトル場 X に対して C^∞ 関数 $\omega(X)$ を対応させる線形写像であることに注意して，ω の共変微分 $\nabla\omega$ を，次のように定義する．

(1.7.2) $$(\nabla_X\omega)(Y)=X(\omega(Y))-\omega(\nabla_XY), \quad Y\in\mathfrak{X}(M)$$

これを一般化して，M 上のタイプ $(0,k)$ または $(1,k)$ のテンソル場 F に対して，その X 方向の共変微分 ∇_XF を次のように定義する．

(1.7.3) $$(\nabla_XF)(X_1, \cdots, X_k)$$
$$=\nabla_X(F(X_1, \cdots, X_k))-\sum_{i=1}^{k}F(X_1, \cdots, \nabla_XX_i, \cdots, X_k) \qquad X_1, \cdots, X_k\in\mathfrak{X}(M)$$

∇_XF は F と同じタイプのテンソルである．

$$(\nabla F)(X_1, X_2, \cdots, X_{k+1})=(\nabla_{X_1}F)(X_2, \cdots, X_{k+1}), \quad X_1, \cdots, X_{k+1}\in\mathfrak{X}(M)$$

で定義されるテンソル ∇F のタイプは，$(0, k+1)$ または $(1, k+1)$ である．

問 12. タイプ (1,2) のテンソル $F=\sum_{i,j,k}F^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\otimes dx^k$ の $X=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 方向の共変微分 ∇_XF の成分 $(\nabla_XF)^i_{jk}$ は

$$(\nabla_XF)^i_{jk}=\sum_l X^l\nabla_lF^i_{jk}$$

と表される．ここに $\nabla_lF^i_{jk}$ は

(1.7.4) $$\nabla_lF^i_{jk}=\frac{\partial F^i_{jk}}{\partial x^l}+\sum_h\left\{{i \atop lh}\right\}F^h_{jk}-\sum\left\{{h \atop lj}\right\}F^i_{hk}-\sum\left\{{h \atop lk}\right\}F^i_{jh}$$

であり，F^i_{jk} の $\frac{\partial}{\partial x^l}$ 方向の共変微分係数といわれる．

二つのテンソル F, H のテンソル積 $F\otimes H$ の成分は，それぞれの成分の積で表される．たとえば，F がタイプ (1,2)，H がタイプ (1,1) ならば，$F\otimes H$ はタイプ (2,3) で，その成分は

$$(F\otimes H)^{is}_{jkt}=F^i_{jk}H^s_t$$

である．そして，$F\otimes H$ の共変微分係数は

$$\nabla_l(F^i_{jk}H^s_t)=(\nabla_l F^i_{jk})H^s_t+F^i_{jk}(\nabla_l H^s_t) \tag{1.7.5}$$

と表される．

問 13. Riemann 多様体 (M, g) 上の Levi-Civita 接続 ∇ に対して，$\nabla g=0$ であることを示せ．

Riemann 曲率テンソル R について，次の恒等式がある．

$$R(X, Y)Z+R(Y, Z)X+R(Z, X)Y=0 \tag{1.7.6}$$

(Bianchi の第1恒等式)

$$(\nabla_X R)(Y, Z)W+(\nabla_Y R)(Z, X)W+(\nabla_Z R)(X, Y)W=0 \tag{1.7.7}$$

(Bianchi の第2恒等式)

Riemann 曲率テンソルの成分を R^l_{kij} とすれば

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}=\sum_l R^l_{kij}\frac{\partial}{\partial x^l}$$

であるが，これは

$$R^l_{kij}=\frac{\partial\begin{Bmatrix}l\\kj\end{Bmatrix}}{\partial x^i}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}l\\ki\end{Bmatrix}}{\partial x^j}+\sum_a\left[\begin{Bmatrix}a\\kj\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}l\\ai\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}a\\ki\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}l\\aj\end{Bmatrix}\right] \tag{1.7.8}$$

と表され，次の諸等式が成り立つ．

$$R^l_{kij}=-R^l_{kji} \tag{1.7.9}$$

$$R^l_{kij}+R^l_{ijk}+R^l_{jki}=0 \tag{1.7.10}$$

(Bianchi の第1恒等式)

$$\nabla_i R^m_{ljk}+\nabla_j R^m_{lki}+\nabla_k R^m_{lij}=0 \tag{1.7.11}$$

(Bianchi の第2恒等式)

さらに

$$R_{lkij}=\sum_m g_{lm}R^m_{kij} \quad \text{とおくと} \quad R_{lkij}=R_{ijlk}$$

である．

問 14. n 次元球面 $(S^n, \bar{g})$ の Riemann 曲率テンソル R は，北極 $(0, \cdots, 0, 1)$ のまわりにおいて

$$R^l_{kij} = \delta^l_i \bar{g}_{kj} - \delta^l_j \bar{g}_{ki}$$

となることを示せ(1.6 節，例 23)．

Riemann 多様体 (M, g) の Riemann 曲率テンソル R が

$$R(X, Y)Z = k\{g(Z, Y)X - g(Z, X)Y\} \quad k \in \boldsymbol{R}$$

となるとき，(M, g) を曲率 k の**定曲率空間**という．

適当に $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の座標を変えれば，S^n の任意の点を北極にすることができるから，$(S^n, \bar{g})$ は曲率 1 の定曲率空間である．

例 24. R が恒等的に零である Riemann 多様体 (M, g) は**平坦**であるという．平坦な Riemann 多様体では，各点のまわりで座標系 $(U, x^1, \cdots, x^n)$ を適当にとることによって，U 上で g を x^i に関して Euclid 計量として表すことができる（[16]，7 章)．

Riemann 多様体 (M, g) において

$$Ric = \sum_{i,j} R_{ij} dx^i \otimes dx^j, \qquad R_{ij} = \sum_l R^l_{jli}$$

を **Ricci 曲率テンソル**，$\rho = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij}$ を**スカラー曲率**という．Ricci 曲率テンソルは，タイプ $(0, 2)$ の対称なテンソルである．

例 25. 向きづけられた n 次元 C^∞ 多様体 M 上の，Riemann 計量の全体を $\mathfrak{R}_M$ で表し，次の汎関数を考える．

$$J : \mathfrak{R}_M \longrightarrow \boldsymbol{R}, \quad J(g) = \int_M \rho_g \omega_g \tag{1.7.12}$$

ここに，ρ_g は計量 g のスカラー曲率，ω_g は g から定まる体積要素である．J の変分方程式は，Einstein の重力場方程式

$$R_{ij} - \frac{\rho}{n} g_{ij} = 0$$

となる（[13] 7 章，[14] 5 章)．この方程式をみたす Riemann 計量を **Einstein 計量**，Einstein 計量をもつ (M, g) を **Einstein 空間**という．

n 次元 Riemann 多様体 (M, g) 上で，次の式でタイプ $(1,3)$ のテンソル $C=\sum C^i_{jkl}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j\otimes dx^k\otimes dx^l$ を定義する．

$$C^i_{jkl}=R^i_{jkl}-\frac{1}{n-2}(\delta^i_k R_{jl}-\delta^i_l R_{jk}+R^i_k g_{jl}-R^i_l g_{jk}) + \frac{\rho}{(n-2)(n-1)}(\delta^i_k g_{jl}-\delta^i_l g_{jk}) \tag{1.7.13}$$

ここに

$$R^i_k=\sum g^{ih}R_{kh}$$

である．このテンソルを Weyl の**共形曲率テンソル**という．

$n\geqq 4$ のとき，二つの Riemann 計量 g, g' が共形的である，すなわちこれらの間に $g'=fg$ $(f\in C^\infty(M),\ f>0)$ という関係があるならば，それらから作った Weyl の共形曲率テンソルは一致する（[21] 4. §9）．

テンソル解析で有用な，共変微分の交換子

$$[\nabla_i, \nabla_j]=\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i$$

については，次の **Ricci の公式**がある．

$$\begin{aligned}
&[\nabla_i, \nabla_j]\xi^k(=\nabla_i\nabla_j\xi^k-\nabla_j\nabla_i\xi^k)=\sum_l R^k_{lij}\xi^l\\
&[\nabla_i, \nabla_j]\eta_k=-\sum_l R^l_{kij}\eta_l\\
&[\nabla_i, \nabla_j]\zeta_{kl}=-\sum_t R^t_{kij}\zeta_{tl}-\sum_t R^t_{lij}\zeta_{kt}
\end{aligned}\tag{1.7.14}$$

Bianchi の第2恒等式は，次に示す交換子の **Jacobi の恒等式**に対応する．

$$[[\nabla_i, \nabla_j], \nabla_k]+[[\nabla_j, \nabla_k], \nabla_i]+[[\nabla_k, \nabla_i], \nabla_j]=0 \tag{1.7.15}$$

解説 曲率テンソルの幾何学的意味について補足説明をしておこう．

端的にいえば，Riemann 曲率は多様体 M における各点のまわりの歪みを表す量である．

M の点 p（その座標を x^i とする）の近くでベクトル場 ξ^i を考え，ξ^i を点 p から道 c_1 に沿って点 r（座標が $(x+\Delta x+\delta x)^i$ であるとする）まで平行移動させてえられたベクトルを $\xi^i_{c_1}(r)$ で表す．もう一つの道 c_2 に沿って $\xi^i(p)$ を平行移動させたときの r におけるベクトルを $\xi^i_{c_2}(r)$ とおく．

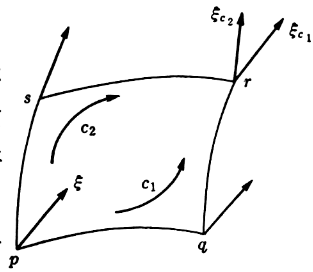


図 1.8 ξ の平行移動

道 c_1 上の点 q での $\xi^i_{c_1}(q)$ は，$\xi^i(p)$ を平行移動させたものであるから

$$\Delta\xi^i+\sum_{j,l}\xi^j(p)\Gamma^i_{lj}(p)\Delta x^l=0$$

が成り立ち

$$\xi^i_{c_1}(q)=\xi^i(p)-\sum_{j,l}\xi^j(p)\Gamma^i_{jl}(p)\Delta x^l \tag{1.7.16}$$

である．したがって

$$\xi^i_{c_1}(r)=\xi^i_{c_1}(q)-\sum_{j,l}\xi^j_{c_1}(q)\Gamma^i_{jl}(q)\delta x^l$$

は次のように表される．

$$\begin{aligned}\xi^i_{c_1}(r)=\xi^i(p)&-\sum_{j,l}\xi^j(p)\Gamma^i_{jl}(p)\Delta x^l-\sum_{j,l}\xi^j(p)\Gamma^i_{jl}(q)\delta x^l\\&+\sum_{j,k,l}\xi^j(p)\Gamma^k_{jl}(p)\Gamma^i_{kt}(q)\delta x^t\Delta x^l\end{aligned} \tag{1.7.17}$$

同様にして $\xi^i_{c_2}(r)$ も次のように表される．

$$\begin{aligned}\xi^i_{c_2}(r)=\xi^i(p)&-\sum\xi^j(p)\Gamma^i_{jl}(p)\delta x^l-\sum\xi^j(p)\Gamma^i_{jl}(s)\Delta x^l\\&+\sum\xi^j(p)\Gamma^k_{jl}(p)\Gamma^i_{kt}(s)\Delta x^t\delta x^l\end{aligned} \tag{1.7.18}$$

ここで s は c_2 上の点である．

$\xi^i_{c_1}(r)$ と $\xi^i_{c_2}(r)$ の差を，$\Delta x,\delta x$ の 3 次以上の無限小を無視して書くと

$$\begin{aligned}&\xi^i_{c_1}(r)-\xi^i_{c_2}(r)\\&=\sum\xi^j(p)\{\Gamma^i_{jk}(s)-\Gamma^i_{jk}(p)\}\Delta x^k\\&\quad-\sum\xi^j(p)\{\Gamma^i_{jl}(q)-\Gamma^i_{jl}(p)\}\delta x^l\\&\quad+\sum\xi^j(p)\{\Gamma^h_{jk}(p)\Gamma^i_{hl}(p)-\Gamma^h_{jl}(p)\Gamma^i_{hk}(p)\}\end{aligned} \tag{1.7.19}$$

これを書き改めると

$$\begin{aligned}&\xi^i_{c_1}(r)-\xi^i_{c_2}(r)\\&=\sum\xi^j(p)\left\{\frac{\partial\Gamma^i_{jk}}{\partial x^l}-\frac{\partial\Gamma^i_{jl}}{\partial x^k}+\sum(\Gamma^t_{jk}\Gamma^i_{tl}-\Gamma^t_{jl}\Gamma^i_{tk})\right\}\Delta x^k\delta x^l\end{aligned} \tag{1.7.20}$$

さらに，右辺の Γ^i_{jk} を $\left\{{i \atop jk}\right\}$ に書き替えれば

$$\xi^i_{c_1}(r)-\xi^i_{c_2}(r)=\sum_{j,l,k}\xi^j R^i_{jlk}\Delta x^k\delta x^l$$

となる．無限に近い 2 点が Levi-Civita 接続によって互いに“接続”されている場合には，ある一つのベクトルを平行移動するとき，その道すじによって結果にくいちがいが生じる．これは空間の計量的歪みによるもので，この歪みを表現する量が Riemann 曲率テンソルである（[14] 2 章）．

1.8 Levi-Civita 接続と調和形式

k-形式の外微分は1.2で定義したが，この外微分は Levi-Civita 接続 ∇ を用いて次のように表すことができる．

$\theta\in\Omega^k(M)$ に対して

$$(1.8.1)\qquad d\theta(X_1,\cdots,X_{k+1}) =\sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}(\nabla_{X_i}\theta)(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+1})$$

$$(1.8.2)\qquad \delta\theta(X_1,\cdots,X_{k-1})=-\sum(\nabla_{e_i}\theta)(e_i,X_1,\cdots,X_{k-1})$$

ここに，$\{e_1,\cdots,e_n\}$ は T_pM の正規直交基底である．

問 15. k-形式 $\theta=\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k}\theta_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$ に対して

$$(1.8.3)\qquad d\theta=\frac{1}{k!}\sum_i\sum_{i_1\cdots i_k}\nabla_i\theta_{i_1\cdots i_k}\,dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

と表されることを示せ．

問 16. $(k+1)$-形式 $\theta=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{i_1,\cdots,i_{k+1}}\theta_{i_1\cdots i_{k+1}}\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k+1}}$ に対して

$$(1.8.4)\qquad \delta\theta=\frac{1}{k!}\sum_{i,j}\sum_{i_1\cdots i_k}\{-g^{ij}\nabla_i\theta_{ji_1\cdots i_k}\}\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

と表されることを示せ．

ベクトル場 $X=\sum X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ の発散 $\operatorname{div}X$ も，共変微分 ∇ を用いて表すことができる．

まず，(M,g) の体積要素を ω_M とすると

$$i_X\omega_M=\sum_i(-1)^iX^i\sqrt{|g|}\,dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

であるから

$$(1.8.5)\qquad \begin{aligned} di_X\omega_M&=\sum_{i,j}(-1)^i\frac{\partial}{\partial x^j}(X^i\sqrt{|g|})dx^j\wedge dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n\\ &=\sum_i\frac{\partial}{\partial x^i}(X^i\sqrt{|g|})dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\\ &=\sum_i\left\{\frac{\partial X^i}{\partial x^i}+X^i\frac{1}{\sqrt{|g|}}\frac{\partial}{\partial x^i}\sqrt{|g|}\right\}\omega_M \end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{div}X=\sum_i\left\{\frac{\partial X^i}{\partial x^i}+X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\log\sqrt{|g|}\right\}$$

である．ところが，(1.6.12) により

$$\sum_i\left\{{i \atop ji}\right\}=\frac{1}{2}\sum_{i,k}g^{ik}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{|g|}\frac{\partial|g|}{\partial x^j}=\frac{\partial}{\partial x^j}\log\sqrt{|g|}$$

であるから div$X$ は次のように書ける．

$$\mathrm{div}X=\sum_i\nabla_iX^i$$

例 26. M 上の C^∞ 関数 f に対して

$$g(X,\mathrm{grad}f)=df(X),\quad X\in\mathfrak{X}(M)$$

となる M 上のベクトル場 grad f を，f の勾配 (gradient) という．これを成分で書くと

$$\mathrm{grad}\,f=\sum_{i,j}g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

である．また，Laplacian $\varDelta$ は次のように書ける．

$$\varDelta f=\delta df=-\mathrm{div}\ \mathrm{grad}\,f=-\sum_{i,j}g^{ij}\nabla_i\nabla_jf$$

定理 1.8.1 (M,g) を向きづけられたコンパクト Riemann 多様体とする．Ricci 曲率テンソルが M 上いたるところ正定値，すなわち

$$任意の\ (\xi^1,\cdots,\xi^n)\neq0\ に対して\ \sum_{i,j}R_{ij}\xi^i\xi^j>0$$

ならば，$\boldsymbol{H}^1=\{0\}$ である． ここに $\boldsymbol{H}^1$ は調和的 1-形式のつくるベクトル空間である．

問 17. この定理を，次の順序で証明せよ．

(i) M 上の 1-形式 $\psi=\sum_i\psi_idx^i$ に対して

$$\varDelta\psi=(\delta d+d\delta)\psi=\sum_i(\varDelta\psi)_idx^i$$

とおくと，(1.7.14)，(1.8.3)，(1.8.4) を用いて

(1.8.6) $$(\varDelta\psi)_i=-\sum g^{hk}\nabla_h\nabla_k\psi_i+R^l_i\psi_l$$

と表される．(**Bochner-Weitzenböck の公式**)

(ii) ベクトル場 $X=-\sum\{g^{hk}g^{ij}\psi_j\nabla_k\psi_i\}\dfrac{\partial}{\partial x^h}$

に対して，発散は次のように書ける．

(1.8.7) $$\mathrm{div}X=-\sum g^{hk}g^{ij}(\nabla_h\nabla_k\psi_i)\psi_j-\sum g^{hk}g^{ij}\nabla_h\psi_i\nabla_k\psi_j$$

(iii)　$(\Delta\psi,\psi)=\int_M[-\sum g^{hk}g^{ij}(\nabla_h\nabla_k\psi_i)\psi_j]\omega_M+\int_M[\sum g^{ij}g^{lm}R_{im}\psi_l\psi_j]\omega_M$

に対して，Green の公式（定理 1.3.5）を適用すると

$$(\Delta\psi,\psi)=\int_M[\sum g^{hk}g^{ij}\nabla_k\psi_i\nabla_h\psi_j]\omega_M+\int_M[\sum R_{ij}\psi^i\psi^j]\omega_M \tag{1.8.8}$$

となる．

(iv)　$\Delta\psi=0$ とすると，(1.8.8) の左辺は 0 である．ところが，右辺はともに負でない値をとり，Ricci 曲率テンソルが正値であるという仮定により，$\psi=0$ でなくてはならない．

1.9　Riemann 多様体の構造方程式

n 次元 C^∞ 多様体 M の開集合 V 上で定義された n 個のベクトル場の順序づけられた組 $(X_1,\cdots,X_n)$ が，各点 $p\in V$ で T_pM の基底となっているとき，これを V 上の**フレーム**という．

座標近傍 $(U,x^1,\cdots,x^n)$ において，ベクトル場の組$\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$はフレームとなる．

Riemann 多様体 (M,g) 上では，各点で正規直交基底となるフレームが定められる．これを**正規直交フレーム**という．

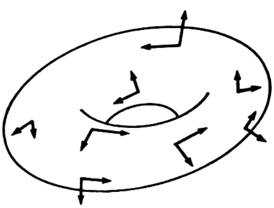


図 1.9　フレーム

U 上で定義された正規直交フレーム $X=(X_1,\cdots,X_n)$ に対して，これに双対な 1-形式の組 $\theta^i(1\leqq i\leqq n)$ が定まる．そこで，Levi-Civita 接続 ∇ に関して

$$\begin{aligned}\nabla_{X_i}X_j&=\sum_k \Gamma^k_{ij}X_k\\ R(X_i,X_j)X_k&=\sum_l R^l_{kij}X_l\end{aligned} \tag{1.9.1}$$

とおく．もちろん右辺の係数 Γ^k_{ij}, R^l_{kij} は U 上の C^∞ 関数である．これを用いて，1-形式 ω^i_j $(1\leqq i,\ j\leqq n)$ と 2-形式 Ω^i_j $(1\leqq i,\ j\leqq n)$ を

$$\begin{aligned}\omega^i_j&=\sum_k \Gamma^i_{kj}\theta^k\\ \Omega^i_j&=\frac{1}{2}\sum_{k,l}R^i_{jkl}\,\theta^k\wedge\theta^l=\sum_{k<l}R^i_{jkl}\,\theta^k\wedge\theta^l\end{aligned} \tag{1.9.2}$$

で定義すると，X が正規直交フレームであることから次の等式が成り立つ．

$$\begin{aligned}&\omega^i_j+\omega^j_i=0\\ &\Omega^i_j+\Omega^j_i=0 \qquad (1\leqq i,j\leqq n)\end{aligned} \tag{1.9.3}$$

この 1-形式 ω^i_j を**接続形式**，2-形式 Ω^i_j を**曲率形式**という．

命題 1.9.1（構造方程式） 1-形式 θ^i, ω^i_j および 2-形式 Ω^i_j $(1 \leqq i, j \leqq n)$ は次の方程式をみたす．

(1.9.4)
$$d\theta^i = -\sum_k \omega^i_k \wedge \theta^k$$
$$d\omega^i_j = -\sum_k \omega^i_k \wedge \omega^k_j + \Omega^i_j$$

証明 $d\theta^i = \frac{1}{2}\sum_{j,k} c^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k$, $c^i_{jk} = -c^i_{kj}$ とおく．

$$d\theta^i(X_j, X_k) = X_j\theta^i(X_k) - X_k\theta^i(X_j) - \theta^i([X_j, X_k])$$
$$= -\theta^i([X_j, X_k])$$
$$[X_j, X_k] = \nabla_{X_j}X_k - \nabla_{X_k}X_j = \sum_l (\Gamma^l_{jk} - \Gamma^l_{kj})X_l$$

であるから

$$c^i_{jk} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk}$$

したがって

$$d\theta^i = \frac{1}{2}\sum_{j,k}(-\Gamma^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k + \Gamma^i_{kj}\,\theta^j \wedge \theta^k)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_k -\omega^i_k \wedge \theta^k - \sum_j \omega^i_j \wedge \theta^j\right\} = -\sum_k \omega^i_k \wedge \theta^k$$

第 2 式も同様に証明できる．

問 18. (1.9.4) の第 2 式を証明せよ．

さて，記述を簡単にするため，上の θ^i，ω^i_j，Ω^i_j をそれぞれまとめて行列の形に表して，構造方程式を書き替えよう．

$$\theta = {}^t(\theta^1, \cdots, \theta^n), \quad \omega = (\omega^i_j)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad \Omega = (\Omega^i_j)_{1 \leq i, j \leq n}$$

とおけば，構造方程式 (1.9.4) は

$$d\theta = -\omega \wedge \theta$$
$$d\omega = -\omega \wedge \omega + \Omega$$

と表される．

また，Bianchi の第 1 恒等式および第 2 恒等式は

(1.9.5)
$$\Omega \wedge \theta = 0$$
$$d\Omega + \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega = 0$$

とかかれる．

ここでは，ω も Ω も微分形式を成分にもつ行列であるから，$\omega\wedge\Omega$ と $\Omega\wedge\omega$ とは単に符号のちがいだけとは限らない．

開集合 V 上で定義されたもう一つの正規直交フレームを $X'=(X_1',\cdots,X_n')$ とする．$U\cap V\neq\phi$ ならば，直交行列に値をもつ C^∞ 関数 $\boldsymbol{a}=(a_j^i)$ を用いて，$U\cap V$ 上では

$$\boldsymbol{X}'=\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$$

と表される．

命題 1.9.2 フレーム $\boldsymbol{X}'$ に関する接続形式，曲率形式を ω',Ω' とすると，$U\cap V$ 上では

(1.9.6)
$$\omega'=\boldsymbol{a}^{-1}d\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{-1}\omega\boldsymbol{a}$$
$$\Omega'=\boldsymbol{a}^{-1}\Omega\boldsymbol{a}$$

である．

証明 定義により

$$\nabla_{X_k}X_j=\sum_i\omega_j^i(X_k)X_i$$

これをまとめて $\nabla X_j=\sum_i\omega_j^iX_i$ と書き，さらに j についてまとめれば

(1.9.7)
$$\nabla\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\omega$$

と書ける．定義から

$$\boldsymbol{X}'\omega'=\nabla\boldsymbol{X}'=\nabla(\boldsymbol{X}\boldsymbol{a})=\boldsymbol{X}d\boldsymbol{a}+\nabla\boldsymbol{X}\boldsymbol{a}$$
$$=\boldsymbol{X}(d\boldsymbol{a}+\omega\boldsymbol{a})=\boldsymbol{X}'\boldsymbol{a}^{-1}(d\boldsymbol{a}+\omega\boldsymbol{a})$$

よって
$$\omega'=\boldsymbol{a}^{-1}d\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{-1}\omega\boldsymbol{a}$$

これを ω' に関する構造方程式に代入すると

$$\begin{aligned}\Omega'&=d\omega'+\omega'\wedge\omega'\\&=d(\boldsymbol{a}^{-1}d\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{-1}\omega\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{a}^{-1}d\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{-1}\omega\boldsymbol{a})\wedge(\boldsymbol{a}^{-1}d\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{-1}\omega\boldsymbol{a})\\&=d\boldsymbol{a}^{-1}\wedge d\boldsymbol{a}+d\boldsymbol{a}^{-1}\cdot\omega\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{-1}d\omega\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^{-1}\omega\wedge d\boldsymbol{a}\\&\quad+\boldsymbol{a}^{-1}d\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}^{-1}d\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{-1}d\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}^{-1}\omega\boldsymbol{a}\\&\quad+\boldsymbol{a}^{-1}\omega\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}^{-1}d\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{-1}\omega\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}^{-1}\omega\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

ここで，$d\boldsymbol{a}^{-1}=-\boldsymbol{a}^{-1}d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}^{-1}$ であるから

$$\text{右辺}=\boldsymbol{a}^{-1}d\omega\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}^{-1}\omega\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{a}^{-1}\omega\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^{-1}\Omega\boldsymbol{a}$$

となる．

(1.9.3) により，ω も Ω も直交群 $O(n)$ の Lie 代数に値をもつ微分形式であることがわかる (1.10 節).

1.10 Lie 群と Lie 代数

n 次の直交行列の全体は，行列の積を演算として群をつくる．この群が**直交群**で，ふつう $O(n)$ で表される．直交行列の積や逆行列の成分は，いずれももとの行列の成分の C^∞ 関数である．直交群のもつこのような性質の一般化として，Lie 群の概念がある．

本節では，Lie 群と Lie 代数に関して，こんご必要な最小限の事項について述べることにする．

定義 1.10.1 群 G が C^∞-多様体の構造をもち，さらに

$$(g_1, g_2) \longmapsto g_1 g_2, \quad g \longmapsto g^{-1}$$

によって定義される写像

$$G\times G \longrightarrow G, \qquad G \longrightarrow G$$

がともに C^∞ 写像であるとき，G を **Lie 群**という．

以下，Lie 群 G の単位元は e で表す．また，群演算が可換ならば，G は可換Lie 群という．Abel 的であるともいわれる．Lie 群 G の次元は，多様体の次元で定義する．

直交群やさらに一般に，ベクトル空間の正則な線形変換全体のつくる群はLie 群の例である．

定義 1.10.2 Lie 群 G において，$g\in G$ に対して

$$L_g(g') = gg', \quad R_g(g') = g'g$$

で定義される変換

$$L_g : G \longrightarrow G, \qquad R_g : G \longrightarrow G$$

をそれぞれ g による**左移動**，**右移動**という．

左移動および右移動は，G の微分同相写像である．単位元 $e\in G$ における接空間 T_eG の元 X から，$g\in G$ における接ベクトル

$$\bar{X}_g = (L_g)_{*e}(X)$$

が定まる．このようにして定まる C^∞ ベクトル場 $\bar{X}$ を，X から定まる**左不変**

ベクトル場という.

$T_eG \ni X, Y$ から定まる左不変ベクトル場をそれぞれ $\bar{X}, \bar{Y}$ とするとき，これを用いて

$$[X, Y] = [\bar{X}, \bar{Y}]_e$$

によって定義される交換子積 $[X, Y]$ は，(1.1.3)〜(1.1.5) をみたす ([2] Ⅳ章 §6).

定義 1.10.3 ベクトル空間 V が，(1.1.3)〜(1.1.5) をみたす交換子積 $[\ ,\ ]$ をもつとき，V を **Lie 代数**という.

Lie 群 G の単位元 $e \in G$ における接空間 T_eG は Lie 代数である. これを Lie 群 G の Lie 代数といい，ドイツ文字 $\mathfrak{g}$ で表す.

T_eG の基底 $X_1, \cdots, X_n$ に対して，左不変ベクトル場 $\bar{X}_1, \cdots, \bar{X}_n$ は，各点 $g \in G$ において T_gG の基底となるので，$\{\bar{X}_1, \cdots, \bar{X}_n\}$ は G 全体で定義されたフレームである. ベクトル場 $\bar{X}_1, \cdots, \bar{X}_n$ の交換子積 $[\bar{X}_i, \bar{X}_j]$ もまた左不変 ([2] Ⅳ §6) であり，これは

$$[\bar{X}_i, \bar{X}_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k \bar{X}_k, \quad C_{ij}^k (1 \leqq i, j, k \leqq n) \text{ は定数}$$

と表される. 定数 C_{ij}^k を Lie 群の**構造定数**という.

$\{\bar{X}_1, \cdots, \bar{X}_n\}$ と双対な 1-形式の組 $\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$ に対して

(1.10.1) $$d\theta^k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij}^k \theta^i \wedge \theta^j \quad \text{(Maurer-Cartan の構造方程式)}$$

が成り立つ.

構造定数は，"ある意味で" Lie 群を完全に定めてしまうということが知られている (Lie の定理. [6] 第10章 §56, [7] 第5章 5.5).

問 19. (1.10.1) を証明せよ.

Lie 群 G 上で，次の式で定まる，Lie 代数 $\mathfrak{g} = T_eG$ に値をもつ 1-形式 θ を定義する.

(1.10.2) $$\theta : T_gG \longrightarrow \mathfrak{g} \qquad X \longmapsto (L_{g^{-1}})_* X = (L_g)_*^{-1} X$$

これを G 上の**標準 1-形式**という.

標準 1-形式は，$\mathfrak{g}$ の基底 $X_1, \cdots, X_n$ および，上述の $\{\theta^1, \cdots, \theta^n\}$ を用いて

$$\theta=\sum_{i=1}^{n} X_i\otimes\theta^i \tag{1.10.3}$$

と表される．もちろん

$$\theta(X)=\sum_{i=1}^{n}\theta^i(X)X_i,\quad X\in T_gG$$

である．

(1.10.3) の θ の外微分 $d\theta$ は

$$d\theta=\sum_{i=1}^{n} X_i\otimes d\theta^i$$

で定義する．

命題 1.10.4 標準 1-形式 θ に対して

$$d\theta+\frac{1}{2}[\theta\wedge\theta]=0 \tag{1.10.4}$$

である．ここに，$[\theta\wedge\theta]$ は

$$[\theta\wedge\theta]=\sum_{i,j}[X_i, X_j]\otimes\theta^i\wedge\theta^j$$

で定義され，$\mathfrak{g}$ に値をもつ 2-形式である．

問 20. (1.10.3)，(1.10.4) を証明せよ．

定義 1.10.5 Lie 群 G 上の C^∞ 曲線 $\varphi: \boldsymbol{R}\longrightarrow G$ が

$$\varphi(s)\varphi(t)=\varphi(s+t)\quad s, t\in\boldsymbol{R}$$

をみたすとき，$\{\varphi(t); t\in\boldsymbol{R}\}$ を G の **1 パラメータ部分群**という．1 パラメータ部分群では

$$\varphi(-t)=\varphi(t)^{-1},\quad \varphi(0)=e$$

である．

左不変ベクトル場は G 上完備であるから，$X\in T_eG$ から定まる左不変ベクトル場 $\bar{X}$ によって生成される 1 パラメータ変換群 $\phi_{X,t}: G\longrightarrow G$ が定義される．そして，単位元 e を通る軌道

$$\{a(t)=\phi_{X,t}(e)\ ;\ t\in\boldsymbol{R}\}$$

は G の 1 パラメータ部分群となる（[2] Ⅳ．§8)．また，逆に 1 パラメータ部分群 $a(t)$ に対して，適当な $X\in\mathfrak{g}$ をとれば $a(t)=\phi_{X,t}(e)$ となることも知ら

れている．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ から Lie 群 G への対応

$$X \longrightarrow \phi_{X,1}(e)$$

によって定義される写像

$$\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$$

を**指数写像**という．$\{\exp tX;\ t\in \boldsymbol{R}\}$ は G の 1 パラメータ部分群である．

定義 1.10.6　Lie 群 G の部分群 H が，多様体 G の部分多様体となっているとき，H は G の **Lie 部分群**であるという．とくに，H が G の閉集合であるときは，H を G の **Lie 閉部分群**という．

問 21.　Lie 群 G の Lie 部分群を H とする．G 上の標準 1-形式 θ の H 上への制限 $\theta|_H$ は H 上の標準 1-形式であることを証明せよ．

次の定理は，Lie 群の単なる群としての部分群が，Lie 部分群となるための一つの判定条件を与えている（[2] Ⅳ §18)．

定理 1.10.7　Lie 群 G の部分群 H が G の閉集合ならば，H は G の Lie 閉部分群である．

Lie 群の具体的な例としては，行列から成る群，すなわち線形 Lie 群がある．本節の最初に述べた直交群もその一つである．

一般に，n 次元実(または複素)ベクトル空間 V の線形変換全体を $\mathfrak{gl}(V)$，V の正則な線形変換全体を $GL(V)$ で表す．V が $\boldsymbol{R}^n$ であるか $\boldsymbol{C}^n$ であるかによって，これらはそれぞれ

$$\mathfrak{gl}(n;\ \boldsymbol{R}),\ \ \mathfrak{gl}(n;\ \boldsymbol{C}),\ GL(n;\ \boldsymbol{R}),\ \ GL(n;\ \boldsymbol{C})$$

と表される．$GL(n;\boldsymbol{R})$，$GL(n;\boldsymbol{C})$ を**一般線形群**という．$GL(V)$ は行列の積を演算として Lie 群となる．行列 A, B の交換子積 $[A, B]$ を

$$[A, B] = AB - BA$$

によって定義すると，$\mathfrak{gl}(V)$ は Lie 群 $GL(V)$ の Lie 代数となる．また，行列の指数関数

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n$$

は，$\mathfrak{gl}(n;\ \boldsymbol{K})$ ($\boldsymbol{K}$ は $\boldsymbol{R}$ または $\boldsymbol{C}$) の指数写像

$$\exp : \mathfrak{gl}(n; \boldsymbol{K}) \longrightarrow GL(n; \boldsymbol{K})$$

である．

$A\in GL(n;\ \boldsymbol{R})$ に対し，$A=(x^i_j)$，$A^{-1}=(y^i_j)$ とすると，$A^{-1}dA=(\sum_k y^i_k dx^k_j)$ は $G=GL(n; \boldsymbol{R})$ の標準 1-形式である．

$GL(n;\boldsymbol{K})$ の閉部分群 $SL(n;\boldsymbol{K})=\{A\in GL(n;\ \boldsymbol{K});\ \ \det A=1\}$ は，前述の定理 1.10.7 により $GL(n;\boldsymbol{K})$ の Lie 閉部分群である．これを**特殊線形群**という．$SL(n;\boldsymbol{K})$ の Lie 代数は

$$\mathfrak{sl}(n; \boldsymbol{K})=\left\{X\in\mathfrak{gl}(n;\boldsymbol{K})\ ;\ \ \mathrm{Tr}X=\sum_{i=1}^{n}X^i_i=0\right\}$$

である．n 次**直交群** $O(n)=\{A\in GL(n;\boldsymbol{R})\ ;\ \ A^tA=I_n\}$ および，n 次**特殊直交群** $SO(n)=\{A\in GL(n;\boldsymbol{R})\ ;\ \ A^tA=I_n,\ \ \det A=1\}$ も $GL(n; \boldsymbol{R})$ の Lie 閉部分群である．

直交群 $O(n)$ は，二つの連結成分 $SO(n)$ と $\{A\in O(n)\ ;\ \det A=-1\}$ に分けられる．$O(n)$ と $SO(n)$ の Lie 代数はともに次のものである．

$$\mathfrak{so}(n)=\{X\in\mathfrak{gl}(n;\boldsymbol{R})\ ;\ \ X+{}^tX=0\}$$

n 次**ユニタリ群** $U(n)=\{A\in GL(n;\boldsymbol{C})\ ;\ \ A^t\bar{A}=I_n\}$ および n 次**特殊ユニタリ群** $SU(n)=\{A\in GL(n;\boldsymbol{C})\ ;\ \ A^t\bar{A}=I_n,\ \det A=1\}$ は $GL(n;\ \boldsymbol{C})$ の Lie 閉部分群である．また，$SU(n)$ は $U(n)$ の連結な閉部分群でもある．$U(n)$ および $SU(n)$ の Lie 代数 $\mathfrak{u}(n)$，$\mathfrak{su}(n)$ はそれぞれ

(1.10.5)
$$\mathfrak{u}(n)=\{X\in\mathfrak{gl}(n;\boldsymbol{C})\ ;\ \ X+{}^t\bar{X}=0\}$$
$$\mathfrak{su}(n)=\{X\in\mathfrak{u}(n)\ ;\ \ \mathrm{Tr}\,X=0\}$$

である．$U(n)$ の次元は n^2，$SU(n)$ の次元は n^2-1 である．また，1 次ユニタリ群 $U(1)=\{z\in\boldsymbol{C};\ \ |z|=1\}$ は可換群である．

定義 1.10.8 G，G' を Lie 群とする．$f: G\longrightarrow G'$ が C^∞ 写像で，$G\ni g_1, g_2$ に対して $f(g_1g_2)=f(g_1)f(g_2)$ であるとき，f を G から G' への**準同型写像**（または単に準同型）という．写像 f が，上への準同型写像であり，e, e' をそれぞれ G, G' の単位元として，$\mathrm{Ker}\,f=\{g\in G;\ \ f(g)=e'\}=\{e\}$ であるとき，f を**同型写像**（または単に同型）という．準同型（または同形）写像 f が存在するとき，G と G' は準同型（または同形）であるという．

例 27.　$\boldsymbol{R}^3$ の元 $u=(u^1, u^2, u^3)$ と 4 元数体 $\boldsymbol{H}$ の純虚数 $u^1i+u^2j+u^3k$ を同一視する．特殊ユニタリ群 $SU(2)$ の元

$$A=\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad a, b\in \boldsymbol{C}$$

に対して，写像

$$f(A):\ u \longmapsto v=(a+jb)u\overline{(a+jb)}, \qquad a+jb\in \boldsymbol{H}$$

を定義する．$\mathrm{Re}\, v=\frac{1}{2}(v+\bar{v})=0$ であるから，$f(A)$ は $\boldsymbol{R}^3$ の線形変換であり，しかも $|v|=|u|$ であるから，$f(A)$ は直交行列を定める．

f は $SU(2)$ から $SO(3)$ の上への準同型写像で，その核は

$$\mathrm{Ker} f=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

である．

写像

$$Ad_g=L_g\circ R_{g^{-1}}:G\longrightarrow G \qquad g'\longmapsto gg'g^{-1}$$

は，Lie 群 G からそれ自身への同型写像で，これを G の**内部自己同型**という．内部自己同型を用いて，Lie 群の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上への随伴表現とよばれる写像が定義されるのであるが，そのまえに，Lie 代数の Lie 部分代数や Lie 代数の準同型写像について簡単にふれておこう．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の部分ベクトル空間 $\mathfrak{h}$ は，任意の $X, Y\in\mathfrak{h}$ について，$[X, Y]\in\mathfrak{h}$ であるとき，$\mathfrak{g}$ の**部分代数**であるという．さらに，任意の $X\in\mathfrak{h}$，$Y\in\mathfrak{g}$ について $[X, Y]\in\mathfrak{h}$ であるとき，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の**イデアル**であるという．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$，$\mathfrak{g}'$ の間の線形写像 $h:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}'$ が，任意の $X, Y\in\mathfrak{g}$ について

$$h[X, Y]=[h(X),\ h(Y)]$$

をみたすとき，h を**準同型写像**という．とくに，h が線形の同型写像であるときは，h は $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{g}'$ の間の**同型写像**であるという．

Lie 群 G の Lie 部分群 H の Lie 代数 $\mathfrak{h}$ は，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の Lie 部分代数である．さらに H が**正規部分群**，すなわち H が G の部分群であって，任意の $g\in G$ に対して $gHg^{-1}\subset H$ となるとき，$\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルとなる．Lie 群の準同型写像（または同型写像）$f:G\longrightarrow G'$ の単位元 e における微分写像 $f_{*e}:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}'$ は，Lie 代数の準同型写像（または同型写像）である．

Lie 群 G の内部自己同型 Ad_g $(g\in G)$ からひき起こされた Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の同型写像を $Ad(g):\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}$ で表し，これを Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の G による**内部自己同型写像**という．$\mathfrak{g}$ の内部自己同型写像の全体 $\mathrm{Int}(\mathfrak{g})=\{Ad(g);\ g\in G\}$ は $GL(\mathfrak{g})$ の部分群である．Lie 群間の準同型

$$Ad:G\longrightarrow GL(\mathfrak{g}),\quad g\longmapsto Ad(g)$$

を，G の $\mathfrak{g}$ 上への**随伴表現**という．随伴表現の微分

$$(Ad_*)_e:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

は準同型である．これを ad で表す．$\mathfrak{g}$ の線形変換 $ad(X)$ については，次のことが知られている（[2] IV §9）．

(1.10.6) $$ad(X)(Y)=[X,Y]$$

とくに，G が線形 Lie 群の場合には

$$Ad(g)X=gXg^{-1},\qquad ad(X)Y=XY-YX$$

である．Ad と ad については，次の公式が成り立つ．

(1.10.7) $$Ad(\exp tX)=\exp t\,ad(X)$$
$$=I+t\,ad(X)+\frac{1}{2}t^2(ad(X))^2+\cdots$$

(1.10.8) $$\exp Ad(g)X=Ad_g(\exp t\,X)=g\cdot\exp t\,X\cdot g^{-1}$$

ここに，$X\in\mathfrak{g}$，$g\in G$ であり，(1.10.7) の右辺の exp は $\mathfrak{g}$ の線形変換としての意味である．

問 22. Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，任意の $X, Y\in\mathfrak{g}$ に対して $[X, Y]=0$ のとき可換であるという．Lie 群 G が可換ならば，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は可換であることを証明せよ．

定義 1.10.9 $\mathfrak{g}$ を Lie 群 G の Lie 代数とする．$\mathfrak{g}$ 上で定義された対称双線形形式 $B:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\longrightarrow\boldsymbol{R}$;

(1.10.9) $$B(X,Y)=\mathrm{Tr}\,ad(X)ad(Y),\quad X,Y\in\mathfrak{g}$$

を，$\mathfrak{g}$ の **Killing 形式**という．

Killing 形式は随伴不変である．すなわち

$$B(Ad(g)X,Ad(g)Y)=B(X,Y),\qquad X,Y\in\mathfrak{g},\ g\in G$$

$g=\exp tZ$ $(Z\in\mathfrak{g})$ を代入し，$t=0$ で両辺を微分すれば，次の式がえられる．

(1.10.10) $$B([Z,X],Y)+B(X,[Z,Y])=0$$

Killing 形式が非退化（任意の $Y\in\mathfrak{g}$ に対して $B(X, Y)=0$ ならば $X=0$）のとき，$\mathfrak{g}$ は**半単純**であるという（Cartan の判定条件［11］4章§1）．また，$\mathfrak{g}$ の次元が2以上で，$\mathfrak{g}$ のイデアルが $\mathfrak{g}$ 自身か $\{0\}$ 以外にないときは**単純**であるという．

半単純 Lie 代数について，次の定理がある（［11］4章 §1）．

定理 1.10.10 半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は単純イデアルの Lie 代数としての直和に分解される．すなわち，$\mathfrak{g}$ はベクトル空間として

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$$

と直和に分解される．ここに，$\mathfrak{g}_i(1\leqq i\leqq k)$ は $\mathfrak{g}$ のイデアルで，かつ Lie 代数として単純，しかも，$X_i\in\mathfrak{g}_i$，$X_j\in\mathfrak{g}_j$；$i\neq j$ のとき $[X_i, X_j]=0$ である．

単純 Lie 代数上の随伴不変な双線形形式は Killing 形式のスカラー倍であることに注意しておこう．

コンパクトな Lie 群 G に対しては，次の事実が知られている（［6］第11章§61 定理 99, 100）．

定理 1.10.11 G をコンパクトな Lie 群，$\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする．

（i） $\mathfrak{g}$ 上には随伴不変な正値双線形形式が存在する．

(ii) $\mathfrak{g}$ は，$\mathfrak{g}$ の中心 $\mathfrak{c}=\{X\in\mathfrak{g};\ [X, Y]=0, \forall Y\in\mathfrak{g}\}$ と有限個の単純イデアル $\mathfrak{g}_i$ の直和に分解される．すなわち

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{c}\oplus\mathfrak{g}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{g}_k$$

(iii) Killing 形式 B を各 $\mathfrak{g}_i$ 上に制限すると，B は負定値である．

線形 Lie 群 $SO(n)$，$U(n)$，$SU(n)$ はコンパクトであり，Lie 代数 $\mathfrak{so}(n)$，$(n\neq 1,2,4)$；$\mathfrak{su}(n)$，$(n\neq 1)$ は単純であることが知られている．$U(n)$ の Lie 代数 $\mathfrak{u}(n)$ は，$\mathfrak{u}(n)$ の中心 $\mathfrak{c}=\{X=\sqrt{-1}\,c\,I;\ c\in\boldsymbol{R}\}$ と $\mathfrak{su}(n)$ の直和に分解する．すなわち，$\mathfrak{u}(n)=\mathfrak{c}\oplus\mathfrak{su}(n)$ である．

例 28. $SO(n)$，$SU(n)$ の Killing 形式 B は次のものである．

(1.10.11) $$B(X, Y)=(n-2)\operatorname{Tr}XY \qquad X, Y\in\mathfrak{so}(n)$$

(1.10.12) $$B(X, Y)=2n\operatorname{Tr}XY \qquad X, Y\in\mathfrak{su}(n)$$

1.11　群の表現と C^∞ 多様体の変換群

V を実（または複素）ベクトル空間とする．Lie 群 G から $GL(V)$ への準同形写像 ρ を，G の V 上の**表現**という．表現 ρ の微分

$$\rho_* = (\rho_*)_e : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

を，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の V 上の表現とよぶ．随伴表現は G の $\mathfrak{g}$ 上の表現である．V の部分ベクトル空間 W が，任意の $g \in G$ について $\rho(g)W \subset W$ であるとき，W を **G-不変ベクトル空間**という．表現 ρ は，G-不変ベクトル空間 W が $\{0\}$ または V 全体に一致するとき**既約**であるといい，既約でない表現を**可約**という．

Lie 群 G と C^∞ 多様体 M に対して，C^∞ 写像

$$G \times M \longrightarrow M, \quad (g, p) \longmapsto g \cdot p$$

が次の条件をみたすとき，G は M に**左から作用**するという．

(1.11.1)　$$(g \cdot h) \cdot p = g \cdot (h \cdot p)$$

(1.11.2)　$$e \cdot p = p \qquad g, h \in G, \ p \in M$$

写像 $\tau_g : p \longrightarrow g \cdot p$ は M の微分同相写像であり

$$(\tau_g)^{-1} = \tau_{g^{-1}}, \quad \tau_e = id_M$$

である．とくに，$g \neq e$ ならば $\tau_g \neq id_M$ のとき，G は M に**効果的に作用**するという．G の部分群

$$H = \{g \in G \,;\ g \cdot p = p\}$$

は点 p での G の**イソトロピー部分群**といわれ，G の Lie 閉部分群である．M のすべての点に対して，その点でのイソトロピー群が単位元のみから成るとき，G の M への作用は**自由**であるという．

Lie 群 G の，C^∞ 多様体 M への**右からの作用**も同様にして定義できる．G が M に右から作用しているとき，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の元 X に対して，**基本ベクトル場**とよばれる M 上のベクトル場 $X^\sharp$ が

(1.11.3)　$$X_p{}^\sharp = \frac{d}{dt}(p \cdot \exp tX)\Big|_{t=0}$$

によって自然に定義できる．写像

$$\sharp : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{X}(M), \quad X \longmapsto X^\sharp$$

は，Lie 代数の準同型である（[20] 8 章）．とくに，G が効果的に作用すれば，$\mathrm{Ker}\sharp=0$ である．

Lie 群 G とその Lie 閉部分群 H に対し，G の部分集合

$$gH=\{gh;\ h\in H\},\ g\in G$$

を，H による**左剰余類**という．左剰余類の全体を G/H で表すと，写像

$$\pi: G\longrightarrow G/H,\ g\longmapsto gH$$

が定義される．これを標準射影という．射影 π によって，G/H に商空間の位相を導入すると，G/H は Hausdorff 空間になる．また，G/H には C^∞ 構造が入り，それに関して π はしずめ込みとなる（[2] Ⅳ，§14）．多様体 G/H を G の H による**商空間**という．$(g, g_1H)\longmapsto gg_1H$ によって，G の G/H への左からの作用が定義される．

例 29. 特殊直交群 $SO(n)$ は $SO(n+1)$ の Lie 閉部分群である．

$SO(n+1)$ の部分群 $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\cdots0 \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{pmatrix};\ A\in SO(n)\right\}$ と $SO(n)$ は同一視することができるからである．

そして，商空間 $SO(n+1)/SO(n)$ は n 次元球面 S^n と微分同相である．

Lie 群 G が C^∞ 多様体 M に左から作用しているとき，任意の 2 点 $p, q\in M$ に対して，$q=g\cdot p$ となる $g\in G$ が存在するならば，G は M に**推移的に作用する**という．G の作用が推移的であるとき，M のある点 p_0 でのイソトロピー部分群を H とすると，M は商空間 G/H と微分同相である．

例 30. $n+1$ 次特殊ユニタリ群 $SU(n+1)$ は n 次元複素射影空間 $P^n(C)$ に左から推移的に作用する．

$SU(n+1)$ は自然に C^{n+1} に左から作用し，射影空間 $P^n(C)$ を定義する同値関係～を保存する（1.1 例 4）から，$SU(n+1)$ の $P^n(C)$ 上での左からの作用がおのずと定まる．この作用が推移的であることは容易に確かめられる．

$(1, 0, \cdots, 0) \in C^{n+1}$ に対応する $P^n(C)$ 上の点におけるイソトロピー部分群は

$$S(U(1) \times U(n)) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & A' \\ 0 & \end{pmatrix};\ a \in U(1),\ A' \in U(n), \det A = 1 \right\}$$

となる.

したがって, $P^n(C)$ は商空間 $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ として書き表すことができる.

第2章　ファイバー束とゲージ変換

2.1　主ファイバー束

多様体 M 上の主ファイバー束とは，M の各点に Lie 群 G のコピーを付随させてできたものであるということができる．G の付随させ方は，一般に M の各点に依存しているので，単なる直積多様体 $M\times G$ とは本質的に異なるが，構造としては $M\times G$ も含んでいる．

定義 2.1.1　C^∞ 多様体 P と M，および Lie 群 G について次の条件がみたされるとき，P は G を**構造群**にもつ M 上の**主ファイバー束**であるという．

（1）　上への C^∞ 写像 $\pi: P \longrightarrow M$ が存在する．π を**射影**という．

（2）　G は P に右から自由に作用する．その作用を

$$P\times G \longrightarrow P; \quad (u, a) \longmapsto u\cdot a = R_a u$$

で表すとき，π に関して次の条件をみたす．

$$\pi(R_a u) = \pi(u)$$

（3）　**局所自明性**をもつ．すなわち，任意の点 $x\in M$ に対して，近傍 $U\ni x$ と，C^∞ 写像

$$\phi: \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$$

および微分同相写像

$$\psi: \pi^{-1}(U) \longrightarrow U\times G; \quad u \longmapsto (\pi(u),\ \phi(u))$$

が存在して，ϕ は

$$\phi(R_a u) = \phi(u)a$$

をみたす．

多様体 M を P の**底空間**という．特に P の底空間や構造群を明確に示したいときは，主ファイバー束 P を $P(M,\ G,\ \pi)$，または $P(M,\ G)$，あるいは $P\xrightarrow{\pi}M$ などと表す．構造群を強調するときは **G-主ファイバー束**ともいう．

近傍 U を P の**局所自明近傍**といい，ϕ を**局所自明写像**とよぶ．また，点 x の逆像 $\pi^{-1}(x)=\{u\in P;\ \pi(u)=x\}$ を x 上の**ファイバー**という．主ファイバー束は，局所的には底空間と構造群の直積になっている．

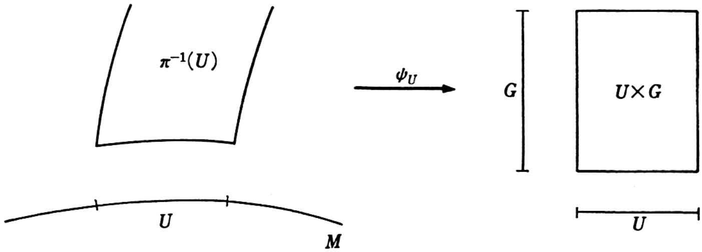


図 2.1 局所自明写像

問 1. ファイバー $\pi^{-1}(x)$ は，点 $u\in\pi^{-1}(x)$ を固定すると，$\pi^{-1}(x)=\{u\cdot a;\ a\in G\}$ と表されることを示せ．

主ファイバー束の例は後にあげることにして，主ファイバー束 $P=P(M,G)$ の変換関数を定義しよう．

定義2.1.1の条件（3）により，底空間 M には局所自明近傍から成る開被覆 $\{U, V, W, \cdots\}$ があり，$U\cap V\neq\phi$ なる U，V 上で定義された局所自明写像 ϕ_U，ϕ_V に対しては，C^∞ 写像

$$f_{VU}: U\cap V \longrightarrow G;\quad x\longmapsto \phi_V(u)\cdot\phi_U(u)^{-1}$$

が定まる．ここに，$x\in U\cap V$，$u\in\pi^{-1}(x)$ であり，f_{VU} の値 $f_{VU}(x)$ は，u のとり方によらず定まる．f_{VU} を**変換関数**という．

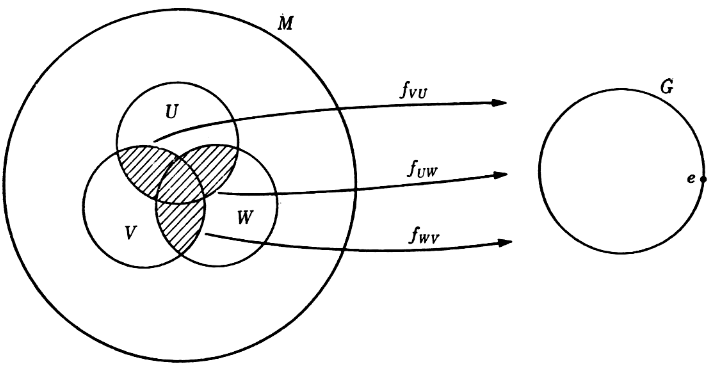


図 2.2 変換関数

問 2. 変換関数 f_{VU} の値は $u\in\pi^{-1}(x)$ のとり方にかかわらず定まることを証明せよ.

命題 2.1.2 変換関数の系 $\{f_{VU}: U\cap V\longrightarrow G\}_{U,V}$ には次の性質がある.

（1） $f_{UU}(x)=e \qquad (x\in U)$

（2） $U\cap V\neq\phi$ ならば

$$f_{UV}(x)=f_{VU}^{-1}(x) \qquad (x\in U\cap V)$$

（3） $U\cap V\cap W\neq\phi$ のとき

$$f_{WV}(x)\cdot f_{VU}(x)=f_{WU}(x) \qquad (x\in U\cap V\cap W)$$

上の（1），（2），（3）を合わせて，**コサイクル条件**という．主ファイバー束は，直積多様体 $U\times G$ と $V\times G$ とを，ファイバー $x\times G$ はファイバー $y\times G$ に，という形で張り合わせてでき上がっている．この張り合わせの規則を定めるのが変換関数である．

主ファイバー束が与えられると，このようにコサイクル条件をみたす変換関数の系が定義されるのであるが，逆に次の命題も成り立つのである．

命題 2.1.3 C^∞ 多様体 M に対して，M の開被覆 $\{U_i\}_{i\in I}$ とコサイクル条件をみたす変換関数の系

$$\{f_{ji}: U_i\cap U_j\longrightarrow G;\ C^\infty \text{写像}\}$$

が与えられると，M 上の G を構造群とする主ファイバー束 $P=P(M,G)$ が定義できて，P の変換関数は f_{ji} と一致する（証明は［16］を参照）.

主ファイバー束の例をあげよう．

例 1.（直積束） 直積多様体 $M\times G$ に対して，$(x,g)a=(x,ga)$ で G の作用を定めると，$M\times G$ は M 上の主ファイバー束となる．これを**直積束**という．

例 2. (Lie 群の商空間) H を Lie 群 G の Lie 閉部分群とする．$g\longmapsto gh$, $g\in G$, $h\in H$ によって，H は G に右から自然に作用する．G/H を H についての左剰余類から成る商空間とすると，G は底空間 G/H 上の H を構造群とする主ファイバー束である（［16］，第1章§5）.

例 3. n 次元実ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ において，一次独立な k 個のベクトルの順序対 $v=\{v^1, \cdots, v^k\}$ を **k-フレーム**という． $\boldsymbol{R}^n$ の k-フレームの全体 $V_{n,k}$ に対して，一般線形群 $GL(n;\boldsymbol{R})$ は次のようにして推移的に左から作用する;

(2.1.1) $$f: V_{n,k} \longrightarrow V_{n,k};$$

$$v \longmapsto f\cdot v=\{f(v^1), \cdots, f(v^k)\}, \quad f\in GL(n;\boldsymbol{R})$$

$v_0\in V_{n,k}$ に対して，v_0 でのイソトロピー部分群を H で表すと，$V_{n,k}$ は Lie 群の商空間 $GL(n;\boldsymbol{R})/H$ と同一視することができる．$V_{n,k}$ は **Stiefel 多様体**といわれ，その次元は nk である．$\boldsymbol{R}^n$ の k 次元部分ベクトル空間 V の全体を $G_{n,k}$ で表すと，$GL(n;\boldsymbol{R})$ は $G_{n,k}$ 上に自然な推移的作用をもち，$G_{n,k}$ は商空間 $GL(n;\boldsymbol{R})/K$ と同一視することができる．K はある $V_0\in G_{n,k}$ を固定する $GL(n;\boldsymbol{R})$ の閉部分群である．$G_{n,k}$ は **Grassmann 多様体**といい，その次元は $(n-k)k$ である．特に $G_{n,n-1}$ は $P^{n-1}(\boldsymbol{R})$ に一致する． ここで，射影

$$\pi: V_{n,k} \longrightarrow G_{n,k}$$

$$v=\{v^1, \cdots, v^k\} \longmapsto V=[v^1, \cdots, v^k \text{ の張る部分空間}]$$

が自然に定義され，$V_{n,k}$ は $G_{n,k}$ 上の $GL(k;\boldsymbol{R})$ を構造群とする主ファイバー束であることが確かめられる．

命題 2.1.4 n 次元 C^∞ 多様体 M の点 x での接空間の n-フレーム全体を L_x とし，$L(M)=\bigcup_{x\in M} L_x$ とおくと，$L(M)$ は M 上の $GL(n;\boldsymbol{R})$ を構造群とする主ファイバー束である．

$L(M)$ を M の**フレーム束**という．

[証明] $L(M)$ の元 u を $u=(x;X_1, \cdots, X_n)$ で表す．一般線形群 $GL(n;\boldsymbol{R})$ は，次のようにして $L(M)$ に右から作用する;

$$R_a: L(M) \longrightarrow L(M); \quad u \longmapsto ua=(x;Y_1, \cdots, Y_n)$$

$$Y_i=\sum_{j=1}^n a_i^j X_j \ \ (1\leqq i\leqq n), \quad a=(a_j^i)_{1\leqq i,j\leqq n}\in GL(n;\boldsymbol{R})$$

射影 $\pi: L(M) \longrightarrow M$ を $\pi(u)=x$ で定義すると，$u, v\in L(M)$ に対して，$\pi(u)=\pi(v)$ は，$v=ua$ なる $a\in GL(n;\boldsymbol{R})$ が存在することと同値であり，この a の作用は自由である．

$(U, x^1, \cdots, x^n)$ を M の局所座標系とすると，$x\in U$ において $X_x\in T_xM$ は

$$X_x=\sum_k \xi^k\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_x, \qquad \xi^k\in \boldsymbol{R}\ (1\leqq k\leqq n)$$

と表されるから，写像 $\phi_U: \pi^{-1}(U)\longrightarrow U\times GL(n; \boldsymbol{R})$ を

$$u=(x; X_1, \cdots, X_n)\longmapsto (x, \phi_U(u)),\quad \phi_U(u)=(\xi_i^k)_{1\leqq i,k\leqq n}$$

で定義する．ここに，(ξ_i^k) は $X_i=\sum \xi_i^k\left(\dfrac{\partial}{\partial x^k}\right)_x$，$(1\leqq i\leqq n)$ で与えられる n 次正方行列である．このとき，あきらかに $\phi_U(R_a u)=\phi_U(u)a$ である．

問 3. フレーム束 $L(M)$ の変換関数は，局所座標系の間の関数行列で与えられることを示せ．

C^∞ 多様体 M が Riemann 計量をもつ場合には，M 上の直交フレームからなる**正規直交フレーム束** $O(M)$ が考えられる．これは，$O(n)$ を構造群とする主ファイバー束である．

例 4.（Hopf のファイバー束） $\boldsymbol{K}$ は $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{C}$ または4元数体 $\boldsymbol{H}$ を表すものとする．$\boldsymbol{K}$ の元のノルム $|\cdot|$ を，$x\in\boldsymbol{R}$ に対しては絶対値 $|x|$ で，$z=x+iy\in\boldsymbol{C}$ に対しては $|z|=\sqrt{z\bar{z}}=\sqrt{x^2+y^2}$ により，$u=x+iy+jz+kw\in\boldsymbol{H}$ に対しては $|u|=\sqrt{u\bar{u}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2+w^2}$ によって定義する（ただしここで，$\bar{z}=x-iy$, $\bar{u}=x-iy-jz-kw$）．このノルムによって，$\boldsymbol{K}^{n+1}$ 上に自然に正定値内積とノルムが定まる．$S_{\boldsymbol{K}}^n=\{x\in\boldsymbol{K}^{n+1};\ |x|=1\}$ を $\boldsymbol{K}^{n+1}$ の単位球面とすれば，自然な射影 $\pi: S_{\boldsymbol{K}}^n\longrightarrow \boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{K});\ x\longmapsto [x]$ が定義される（第1章1.1節，例）．$S_{\boldsymbol{K}}^n$ は $\boldsymbol{P}^n(\boldsymbol{K})$ 上の $S_{\boldsymbol{K}}^0$ を構造群にもつ主ファイバー束である．$n=1$ のときこれを **Hopf のファイバー束**という．

$S_{\boldsymbol{K}}^0$ は Lie 群である．実際，$S_{\boldsymbol{R}}^0=\{1, -1\}$, $S_{\boldsymbol{C}}^0=U(1)$ であり，さらにまた，$S_{\boldsymbol{H}}^0=\{u\in\boldsymbol{H};\ |u|=1\}$ は $Sp(1)$ と表され，これは特殊ユニタリ群 $SU(2)$ と同型である（第1章1.1節 例）．

例 5. $\{U_1, U_2, U_3, \cdots\}$ を C^∞ 多様体 M の開被覆とする．これに対して $h_{ij}(x)$ は $U_i\cap U_j$ $(\neq\phi)$ 上で定義された C^∞ 実数値関数で

$$h_{ii}(x)=0,\ \ h_{ij}(x)=-h_{ji}(x),\ \ x\in U_i\cap U_j$$

$$h_{ij}(x)+h_{jk}(x)=h_{ik}(x),\ \ x\in U_i\cap U_j\cap U_k\ \ (\neq\phi)$$

であるとする．このとき

$$g_{ij}(x)=e^{2\pi\sqrt{-1}\,h_{ij}(x)}$$

で定まる g_{ij} の系 $\{g_{ij}\}$ は M 上の $U(1)$-主ファイバー束を定義する．

次に主ファイバー束の間の写像を定義しよう．

定義 2.1.5 G-主ファイバー束 $P=P(M,G)$, $Q=Q(N,G)$ に対して，写像 $f:P\longrightarrow Q$ が次の条件をみたすとき，f は**束同型写像**であるという；

（1） f は微分同相写像である．

（2） $u\in P$, $a\in G$ に対して，$f(ua)=f(u)a$ である．

とくに，$Q=P$ であるとき，束同型写像 f は**束自己同型写像**といわれる．

条件（2）により，束同型写像 f は，底空間の微分同相写像 $\underline{f}:M\longrightarrow N$ をひき起こす．

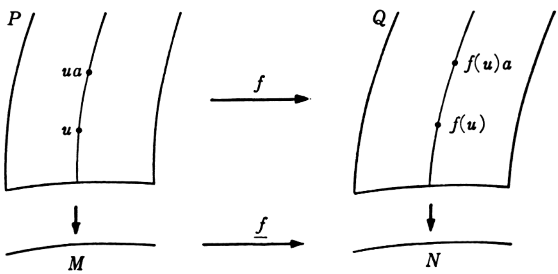


図 2.3 束同型写像

定義 2.1.6 同じ底空間 M 上の G-主ファイバー束 $P(M,G)$ と $P'(M,G)$ の間に，$\underline{f}:M\longrightarrow M$ が恒等変換となるような束同型写像 $f:P\longrightarrow P'$ が存在するとき，P と P' は**同値**であるという．P と P' が同値であることを $P\sim P'$ で表す．

とくに，直積束と同値な主ファイバー束は**自明**であるといわれる．

問 4. G-主ファイバー束 P, P' が同値であるための必要十分条件は，P, P' に共通の局所自明近傍から成る底空間 M の開被覆 $\{U, V, W,\cdots\}$ と，その各近傍 U について C^∞ 写像 h_U : $U\longrightarrow G$ が存在して，次の条件をみたすことである；

P と P' の変換関数 f_{VU}, f'_{VU} について

$$f'_{VU}(x)=h_V^{-1}(x)f_{VU}(x)h_U(x),\quad x\in U\cap V$$

C^∞ 多様体 M 上の G-主ファイバー束全体を同値関係で類別してえられる集合に対して，M が 4 次元の場合には次の定理がある．

定理 2.1.7 G は連結で単連結(*)なコンパクト Lie 群で，かつ単純とする (その Lie 代数が単純のとき，Lie 群 G は単純であるという)．連結でコンパクトな 4 次元 C^∞ 多様体 M 上の G-主ファイバー束全体において，$\sim$ で同値なものを同一視してえられる集合は，整数全体の集合 $\boldsymbol{Z}$ と 1 対 1 の対応をもつ．その対応で，G-主ファイバー束 P に対応する整数を P の**指数**という．

注 1. (*)**単連結** M の 2 点 x, y に対し，二つの曲線 $c, c'\in C(x,y)$ が**ホモトープ**であるとは，連続写像

$$F:[0,1]\times[0,1]\longrightarrow M;\quad (t,s)\longmapsto F(t,s)$$

で次の条件をみたすものが存在することである．

$$F(t,0)=c(t),\quad F(t,1)=c'(t)\quad (0\leqq t\leqq 1)$$
$$F(0,s)=x,\quad F(1,s)=y\quad (0\leqq s\leqq 1)$$

連結な M において，$C(x,x)$ のどの曲線 c も，定値曲線 $c_0: t\longmapsto x$ $(0\leqq t\leqq 1)$ にホモトープとなるとき，M は単連結であるという．M が単連結であることを $\pi_1(M)=0$ と書く．

上の定理の証明は本書の範囲を超えるので行わない ([24] 付録 E，および [61]．p. 168 参照)．この定理により，「$P\sim P'$」$\Longleftrightarrow$「P と P' の特性数 $(\in\boldsymbol{Z})$ が等しい」という結論が出る (第 3 章，第 5 章 命題 5.2.3)．

主ファイバー束 P の束自己同型写像の全体 $\mathrm{Aut}(P)$ は群をなす．$\mathrm{Aut}(P)$ の部分群 $\{f\in\mathrm{Aut}(P);\ \underline{f}=id_M(M\text{の恒等変換})\}$ を $\mathrm{Aut}_0(P)$ で表す．

C^∞ 多様体 M の開集合 W から，主ファイバー束 P への C^∞ 写像 $\sigma: W\longrightarrow P$ は，$\pi\circ\sigma=id_W$ のとき P の W 上での**切断**といわれる．局所自明写像 ψ に対して $\sigma(x)=\psi^{-1}(x,e)$ で定義される σ は，局所自明近傍上の C^∞ 切断である．

C^∞ Riemann 多様体の開集合上で定義された正規直交フレームは，直交フレーム束 $O(M)$ の U 上の C^∞ 切断の例である．

問 5. 主ファイバー束 P は，底空間 M 全体を定義域とする C^∞ 切断をもてば自明となる．これを示せ．

2.2 同伴ファイバー束

本節では，主ファイバー束 $P=P(M,G)$ に同伴したファイバー束を定義しよう．

C^∞ 多様体 F に Lie 群 G が左から作用しているとする．すなわち，C^∞ 写像

$$G\times F \longrightarrow F;\quad (g,f)\longmapsto g\cdot f$$

で，次の条件をみたすものがあるとする．

$$(g_1g_2)f=g_1(g_2f)$$

このとき，G の元 g は F の微分同相写像を定めるが，それを $\rho(g)$ で表す．直積多様体 $P\times F$ 上で，G は

$$(u,f)g=(ug,\ \ \rho(g^{-1})f)$$

によって右から作用する．これによって，$P\times F$ 上で自然に同値関係～が定義される；すなわち，二つの元 (u,f)，$(v,f')\in P\times F$ は，$(v,f')=(u,f)a$ となる $a\in G$ が存在するとき同値 $(u,f)\sim(v,f')$ であるとする．

(u,f) を含む同値類を $u\cdot f$ で表し，同値類 $u\cdot f$ 全体から成る集合を $P\times_\rho F$ あるいは $P\times_G F$ と書き，F をファイバーとする，P に**同伴したファイバー束**という．

問 6. $(ua)\cdot f=u\cdot(\rho(a)f)$ を示せ．

自然な射影 $P\times F\longrightarrow P\times_\rho F$; $(u,f)\longmapsto u\cdot f$ により，$P\times_\rho F$ には商空間の位相がはいる．

射影 $\pi_1: P\times_\rho F\longrightarrow M$ を，$\pi_1(u\cdot f)=\pi(u)$ で定義する．また，$\pi_1^{-1}(x)$ $(x\in M)$ を F_x で表し，x 上のファイバーという．

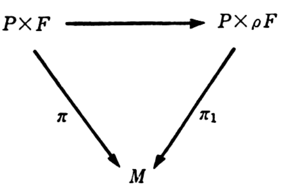


図 2.4 同伴ファイバー束

命題 2.2.1 主ファイバー束 P に同伴したファイバー束

$$P\times_\rho F\xrightarrow{\pi_1} M$$

は，局所自明的である．すなわち，U，ϕ_U をそれぞれ P の局所自明近傍，局所自明写像とすると，写像

$$\psi_{\rho,U}: \pi_1^{-1}(U)=\{u\cdot f\in P\times\rho F;\ \pi(u)\in U\}\longrightarrow U\times F;$$
$$u\cdot f\longmapsto (\pi(u),\ \rho(\phi_U(u))f)$$

は同相写像である．さらに，写像

$$\psi_{\rho,V}\circ\psi_{\rho,U}^{-1}: (U\cap V)\times F\longrightarrow (U\cap V)\times F$$

は，P の変換関数を f_{VU} として

$$(x,f)\longmapsto (x,\rho(f_{VU}(x))f)$$

で与えられる．

［証明］　まず，$\psi_{\rho,U}$ が $u\cdot f$ の代表 (u,f) のとり方によらないで定義されることを示そう．

$u'\cdot f'=u\cdot f$ ならば，$u'=ua$，$f'=\rho(a^{-1})f$ なる $a\in G$ が存在する．このとき $\rho(\phi_U(u'))f'$ は

$$\rho(\phi_U(ua))\rho(a^{-1})f=\rho(\phi_U(u)a)\rho(a^{-1})f=\rho(\phi_U(u))f$$

となり，$\rho(\phi_U(u))f$ に一致する．

$\psi_{\rho,U}$ が上への写像であることは，$U\times F$ の任意の元 (x,f) に対し $u\in\pi^{-1}(x)$ をとり $f'=\rho(\phi_U(u)^{-1})f$ とおくと，$u\cdot f'\in\pi_1{}^{-1}(U)$ かつ $\psi_{\rho,U}(u\cdot f')=(x,f)$ であることからわかる．

$\psi_{\rho,U}$ が1対1写像であることは，次のようにして示すことができる．

いま，$\psi_{\rho,U}(u\cdot f)=\psi_{\rho,U}(u'\cdot f')$ とすれば，$\pi(u)=\pi(u')$ であるから，$u'=ua$ なる $a\in G$ が存在する．

$$\rho(\phi_U(u'))f'=\rho(\phi_U(u))\rho(a)f'=\rho(\phi_U(u))f$$

であるから，これらに左から $\rho(\phi_U(u)^{-1})$ を作用させると $\rho(a)f'=f$，すなわち $f'=\rho(a^{-1})f$，よって $u'\cdot f'=u\cdot f$ である．

$\psi_{\rho,U}$ が同相写像であることは，$P\times\rho F$ の位相の定義から容易に確かめられる．

問 7.　局所自明近傍 U, V; $U\cap V\neq\phi$ に対して $\psi_{\rho,V}\circ\psi_{\rho,U}^{-1}(x,f)=(x,\rho(f_{VU}(x))f)$，$x\in U\cap V$ である．これを証明せよ．

上の命題により，局所自明写像 $\psi_{\rho,U}$ と変換関数 $\rho(f_{VU}(x))$ を用いて $P\times_\rho F$ に C^∞ 多様体の構造を定義することができる． こんご，C^∞ 主ファイバー束 P に同伴したファイバー束はすべて，この形の C^∞ 多様体であるとする．

Lie 群 G の群共役演算

$$Ad : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)\,; \quad g \longmapsto Ad_g = L_g \circ R_{g^{-1}}$$

(Aut(G) は G の自己同型の全体)

は，$g_1, g_2 \in G$ に対して

$$Ad_{g_1 g_2} = Ad_{g_1} \cdot Ad_{g_2}$$

をみたすから，Ad は G の G 自身への左からの作用である． また， 随伴表現 $Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$ は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上への左からの作用を与えている．

定義 2.2.2 主ファイバー束 P に同伴したファイバー束 $G_P = P\times_{Ad} G$ および $\mathfrak{g}_P = P\times_{Ad}\mathfrak{g}$ を，それぞれ P の**自己同型束**および**随伴束**という． 自己同型束は AdP, 随伴束は $ad\,P$ と表されることもある．

f_{VU} を主ファイバー束 P の変換関数とすると

$$Y = Ad(f_{VU}(x))X$$

のとき，$(x, X) \in U\times\mathfrak{g}$ と $(x, Y) \in V\times\mathfrak{g}$ は随伴束 $\mathfrak{g}_P$ の同一元である．

$g\in G$, $X, Y \in \mathfrak{g}$ のとき， $Ad(g)[X, Y] = [Ad(g)X,\ Ad(g)Y]$ である， すなわち $Ad(g)$ は交換子積を保存するから， $\mathfrak{g}_P$ の各ファイバー $\pi_1^{-1}(x)$ は自然に $\mathfrak{g}$ と同型な Lie 代数の構造をもつ．

また, $\mathfrak{g}_P$ の M 上で定義された C^∞ 切断全体を $\Gamma(M;\mathfrak{g}_P)$ で表すと $\Gamma(M;\mathfrak{g}_P)$ は “無限次元” の Lie 代数となる． この $\Gamma(M;\mathfrak{g}_P)$ の元を P の**無限小ゲージ変換**という． $\Gamma(M;\mathfrak{g}_P)$ の元 γ は各局所自明近傍上で定義された C^∞ 写像

$$\gamma_U : U \longrightarrow \mathfrak{g}$$

の族 $\{\gamma_U, \gamma_V, \gamma_W, \cdots\}$ であって，$U\cap V \neq \phi$ ならば

$$\gamma_V(x) = Ad(f_{VU}(x))\gamma_U(x), \qquad x\in U\cap V \tag{2.2.1}$$

である． Lie 代数 $\Gamma(M;\mathfrak{g}_P)$ はのちに記号 $\Omega^0(\mathfrak{g}_P)$ で表すが，$\gamma\in\Gamma(M;\mathfrak{g}_P)$ の C^∞ 関数倍 $f\gamma$ が再び $\Omega^0(\mathfrak{g}_P)$ の元となるので，$\Gamma(M;\mathfrak{g}_P)$ は $C^\infty(M)$-加群であると同時に

$$[f\gamma, \xi] = [\gamma, f\xi] = f[\gamma, \xi] \quad \gamma, \xi \in \Gamma(M;\mathfrak{g}_P), \quad f\in C^\infty(M) \tag{2.2.2}$$

をみたす． 性質 (2.2.2) をもつところが，C^∞ 多様体上のベクトル場のつくる

Lie 代数 $\mathfrak{X}(M)$ と異なる点である．

自己同型束 G_P の各ファイバーも $\mathfrak{g}_P$ の場合と同様に群の構造をもち，G_P の M 上で定義された C^∞ 切断の全体 $\Gamma(M;G_P)$ に群の構造がはいる．

$\Gamma(M;G_P)$ を $\mathcal{G}_P$ で表し，$\mathcal{G}_P$ を P の**ゲージ変換群**，$\mathcal{G}_P$ の元を P の**ゲージ変換**という．

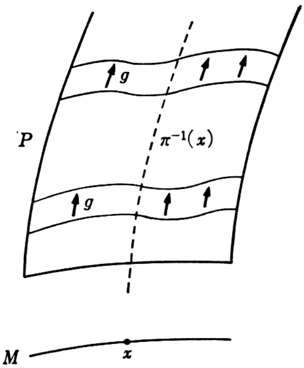


図 2.5 ゲージ変換

無限小ゲージ変換の場合と同じように，P のゲージ変換 g は各局所自明近傍上で定義された C^∞ 写像

$$g_U : U \longrightarrow G$$

の族 $\{g_U, g_V, g_W, \cdots\}$ であって，$U\cap V\neq\phi$ ならば

$$(2.2.3)\qquad g_V(x)=f_{VU}(x)\cdot g_U(x)\cdot f_{VU}^{-1}(x),\quad x\in U\cap V$$

である．逆に，(2.2.3) をみたす C^∞ 写像 $g_U : U\longrightarrow G$ の族は $\mathcal{G}_P$ の元を定める．

M の各点 x に対して G の単位元 e を対応させる写像は自然に G_P の C^∞ 切断を定義する．これは $\mathcal{G}_P$ の単位元になっている．

$\exp : \mathfrak{g}\longrightarrow G$ を Lie 群 G の指数写像とすると，自然に P に同伴するファイバー束の間の写像

$$\mathfrak{g}_P\longrightarrow G_P;\quad u\cdot X\longmapsto u\cdot\exp X,\quad u\in P,\ X\in\mathfrak{g}$$

がひき起こされる．この写像もやはり**指数写像**といい，同じ記号 exp で表す．$\exp : \mathfrak{g}_P\longrightarrow G_P$ が底空間 M の恒等変換をひき起こすことは明らかである．

問 8. $\exp : \mathfrak{g}_P\longrightarrow G_P$ は代表 (u, X) のとり方によらないで定義されることを示せ．

指数写像 $\exp : \mathfrak{g}_P\longrightarrow G_P$ を用いると，$\Gamma(M;\mathfrak{g}_P)$ から $\mathcal{G}_P=\Gamma(M;G_P)$ への写像 exp が自然に定義される．このことは，次の議論と合わせて，$\Gamma(M;\mathfrak{g}_P)$ が $\mathcal{G}_P$ の “Lie 代数” であることを示唆している．

Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は，単位元 e での接空間 T_eG であった．すなわち，e を通る曲線の e での接ベクトルが $\mathfrak{g}$ の元であった．$\mathcal{G}_P$ は “Lie 群” ではないが，次のように Lie 群と類似した見方ができる．

恒等変換 e を通る $\mathcal{G}_P$ の曲線 $c_t:(a,b)\longrightarrow\mathcal{G}_P$ (ただし $c_0=e$ とする) とは，C^∞ 写像 $c:(a,b)\times M\longrightarrow G_P$ であって

$$\pi_1\circ c(t,x)=x,\quad c(0,x)=e\quad (t\in(a,b),\ x\in M)$$

をみたすものがあり，これによって

$$c_t(x)=c(t,x)$$

で与えられるものとする．すると，局所自明近傍 U 上で $c(t,x)$ は，$|t|$ が十分小さければ，t に関して C^∞ であるような C^∞ 写像

$$c_{U,t}:U\longrightarrow G;\quad x\longmapsto c_{U,t}(x),\ c_{U,0}(x)=e$$

を定義する．接ベクトル

$$\dot{c}_0: x\longmapsto c_{*(0,x)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

は $\mathfrak{g}_P$ の切断 $\gamma=\{\dot{c}_{U,0},\ \dot{c}_{V,0},\ \dot{c}_{W,0},\ \cdots\}$ を与える．この意味で $\Gamma(M;\mathfrak{g}_P)$ は $\mathcal{G}_P$ の単位元での接空間とみなすことができる．$\Gamma(M;\mathfrak{g}_P)$ の元が無限小ゲージ変換とよばれる理由はここにある．$\mathcal{G}_P$ は無限次元 Lie 群である ([10] 4 章 §2, 5 章 §3, [24] 付録A)．

例 6. 特殊ユニタリ群 $SU(n)$ の中心

$$Z=\left\{\begin{pmatrix} e^{2\pi k\sqrt{-1}/n} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{2\pi k\sqrt{-1}/n}\end{pmatrix};\quad k=0,1,\cdots,n-1\right\}$$

は有限群である．多様体 M 上の $SU(n)$-主ファイバー束 P において，M の各点 x に対して $z\in Z$ を対応させる定値関数は，明らかに $\mathcal{G}_P$ の C^∞ 切断を定義している((2.2.3)参照)．この意味で Z は $\mathcal{G}_P$ の部分群とみることができる．

上の例に関して，次の命題が成り立つ．

命題 2.2.3 $SU(n)$-主ファイバー束 P のゲージ変換群を $\mathcal{G}_P$ とする．$\mathcal{G}_P$ の中心 $Z_{\mathcal{G}_P}$ は Z と一致する．

[証明] 次の事実を用いる．

$$\exp:\mathfrak{su}(n)\longrightarrow SU(n)$$

は上への C^∞ 写像である（[5] Ⅱ章§7)．U を P の局所自明近傍とする．任意の点 $x\in U$ と任意の元 $\bar{g}\in G$ に対し，$g\in\mathcal{G}_P$ が存在して $g_U: U\longrightarrow G$ が $x\in U$ で $g_U(x)=\bar{g}$ をみたすならば，$Z_{\mathcal{G}_P}$ の元 f に対して，$f_U: U\longrightarrow Z$ となる．Z の次元は 0 であるから f_U は定値写像であり，$Z_{\mathcal{G}_P}\subset Z$ であることが証明されたことになる．

さて，$\exp: \mathfrak{su}(n)\longrightarrow SU(n)$ が上への写像であるから，台が U に含まれるような C^∞ 写像 $\psi: U\longrightarrow \mathfrak{g}$ があって

$$\exp\psi\in\mathcal{G}_P \quad \text{かつ,} \quad (\exp\psi)(x)=\bar{g}$$

となるものが存在することは容易にいえる．したがって上の仮定の部分が示された．

次の命題は，主ファイバー束のゲージ変換と自己同型とが同じものであることを示している．

命題 2.2.4　ゲージ変換群 $\mathcal{G}_P$ と自己同型群 $\mathrm{Aut}_0(P)$ とは群として同型である．

[証明]　任意の $g\in\mathcal{G}_P$ に対しては，(2.2.3) をみたす局所自明近傍 U 上の $g_U: U\longrightarrow G$ の族 $\{g_U, g_V, \cdots\}$ が対応する．

さて，$\mathfrak{h}\in\mathrm{Aut}_0(P)$ を一つとろう．$\mathfrak{h}$ は底空間 M の恒等変換をひき起すので，P の各ファイバーは変換 $\mathfrak{h}$ によって変わらない．よって写像 $\mathfrak{h}_U: U\longrightarrow G$ が

$$\mathfrak{h}_U(x)=\phi_U(\mathfrak{h}(u))\phi_U^{-1}(u) \quad u\in\pi^{-1}(x)$$

によって定義できる．ここに，$\phi_U: U\longrightarrow G$ は，P の局所自明写像 ψ_U から定まる写像である (定義 (2.1.1) の条件（3）参照)．$\mathfrak{h}_U$ は $u\in\pi^{-1}(x)$ のとり方によらず定まる．

族 $\{\mathfrak{h}_U, \mathfrak{h}_V, \mathfrak{h}_W, \cdots\}$ は，$U\cap V\neq\phi$ ならば，$U\cap V$ 上で

$$\mathfrak{h}_V=f_{VU}\cdot\mathfrak{h}_U\cdot f_{VU}^{-1}$$

をみたす．

なぜなら，変換関数の定義 (2.1節) により $f_{UV}(x)=f_{VU}^{-1}(x)$ であり

$$\begin{aligned}\mathfrak{h}_U(x)f_{UV}(x)&=\phi_U(\mathfrak{h}(u))\phi_U^{-1}(u)\cdot(\phi_U(u)\phi_V^{-1}(u))\\&=\phi_U(\mathfrak{h}(u))\phi_V^{-1}(u)\\&=\phi_U(\mathfrak{h}(u))\phi_V^{-1}(\mathfrak{h}(u))\phi_V(\mathfrak{h}(u))\phi_V^{-1}(u)\end{aligned}$$

$$= f_{UV}(x)\mathfrak{h}_V(x)$$

となるからである．

写像 τ : $\mathrm{Aut}_0(P) \longrightarrow \mathcal{G}_P$ を，$\mathfrak{h}$ に対して族 $\{\mathfrak{h}_U, \mathfrak{h}_V, \mathfrak{h}_W, \cdots\}$ から成るゲージ変換を対応させるものとして定義する．τ が群として準同型写像であること，および $\mathrm{Ker}\,\tau$ が P の恒等変換のみから成ることは容易に示される．τ が上への写像であることは次のことからわかる．

$U\cap V$ 上で，$g_V = f_{VU}\cdot g_U\cdot f_{VU}^{-1}$ をみたす任意の族 $\{g_U, g_V, g_W, \cdots\}$ に対して

$$\mathfrak{h}(u) = \phi_U^{-1}(x, g_U(x)\phi_U(u))$$

で定義される写像 $\mathfrak{h}: P \longrightarrow P$ は，P の自己同型写像で，$\underline{\mathfrak{h}}$ は M の恒等変換となり，$\tau(\mathfrak{h})$ は元の族 $\{g_U, g_V, \cdots\}$ に一致することが示される．

最後に，主ファイバー束に同伴したファイバー束のいくつかの例をあげる．

例 7. **Möbius の帯**は，底空間が円周 S^1 で，ファイバーが開区間 $I=(-1,1)$ のファイバー束である．Möbius の帯は，パラメータ θ, v を用いて次の式で与えられる．

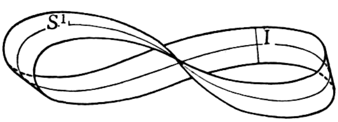


図 2.6 Möbius の帯

(2.2.4)
$$\boldsymbol{r} = (x, y, z) = \boldsymbol{f}(\theta) + v\boldsymbol{g}(\theta)$$
$$\boldsymbol{f}(\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$$
$$\boldsymbol{g}(\theta) = \left(\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta,\ \sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\ \cos\frac{\theta}{2}\right)$$
$$\left(-\pi<\theta<\pi,\quad -\frac{1}{2}<v<\frac{1}{2}\right)$$

Möbius の帯は，S^1 上の $\boldsymbol{Z}_2 = \{-1,\ +1\}$ を構造群にもつ主ファイバー束に同伴したファイバー束である．

例 8. Grassmann 多様体 $G_{n,k}$ の元 V は，n 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ の k 次元部分空間である．

$$E_{n,k} = \{(V, v)\in G_{n,k}\times \boldsymbol{R}^n;\ v\in V\}$$

は $G_{n,k}$ 上のファイバー束である．これは Stiefel 多様体による $GL(k;\boldsymbol{R})$-主ファイバー束 $\pi: V_{n,k} \longrightarrow G_{n,k}$ に同伴したファイバー束で，ファイバーは k次

元ベクトル空間である．

$E_{n,k}$ は $G_{n,k}$ 上の**普遍ベクトル束**とよばれる．

2.3 ベクトル束

主ファイバー束 $P=P(M, G)$ の構造群 G がベクトル空間 E 上に表現 ρ をもつとする．E は複素ベクトル空間でもよいが，さしあたり，実ベクトル空間と仮定して話を進める．

表現 ρ によって，P に同伴したファイバー束 $\boldsymbol{E}=P\times_{\rho}E$ が定義される．局所自明近傍上において，$(x,\xi)\in U\times E$ と $(x,\eta)\in V\times E$ が $\boldsymbol{E}$ の同一の元を定めるための必要十分条件は

(2.3.1) $$\eta=\rho(f_{VU}(x))\xi,\quad x\in U\cap V$$

である（2.2節　命題2.2.1）．$\rho(f_{VU}(x))$ は E の線形変換だから $\boldsymbol{E}\xrightarrow{\pi_1}M$ の各ファイバー $\pi_1{}^{-1}(x)$ はベクトル空間の構造をもつ．この $\boldsymbol{E}$ を **G-ベクトル束**という．E の次元が n のとき，$\boldsymbol{E}$ の次元は n である，あるいは $\boldsymbol{E}$ の階数は n であるという．$G=GL(E)$ の場合には，$\boldsymbol{E}$ は単に（実）**ベクトル束**という．

既述の随伴束 $\mathfrak{g}_P$ は G-ベクトル束の例である．

構造群 G の E 上の表現 ρ が自明，すなわち，$g\in G$ に対して $\rho(g)=id_E$ のとき，P に同伴したベクトル束 $\boldsymbol{E}$ は直積多様体 $M\times E$ となる．これを**直積ベクトル束**という．

例 9.　$U(1)$-主ファイバー束 P の随伴束は直積ベクトル束 $M\times\mathfrak{u}(1)$ である．

ベクトル空間 E に対して，線形写像 $f: E\longrightarrow \boldsymbol{R}$ の全体，すなわち E の双対空間を E^* で表す．群 G の E 上の表現 ρ に対して，自然に E^* 上の表現 ρ^* が定まる．それは，$g\in G$，$\theta\in E^*$ に対して $\rho^*(g)\theta$ が

$$(\rho^*(g)\theta)(\xi)=\theta(\rho(g^{-1})\xi),\quad \xi\in E$$

として定義されるからである．ベクトル束 $\boldsymbol{E}^*=P\times_{\rho^*}E^*$ を $\boldsymbol{E}$ の**双対ベクトル束**という．

次に，ベクトル空間の直和，テンソル積に対応する，ベクトル束の Whitney 和，テンソル積を定義しよう．

G_1-ベクトル束 $\boldsymbol{E}_1$ と，G_2-ベクトル束 $\boldsymbol{E}_2$ を考える．構造群 G_1，G_2 は一致していてもよい．$\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$ の変換関数をそれぞれ

$$\rho_1(f_{1VU}) : U\cap V \longrightarrow GL(E_1),\quad \rho_2(f_{2VU}) : U\cap V \longrightarrow GL(E_2)$$

とするとき，E_1 と E_2 の直和 $E_1 \oplus E_2$ 上の直和表現による変換関数

$$U\cap V \longrightarrow GL(E_1\oplus E_2)$$

$$x \longmapsto \begin{pmatrix} \rho_1(f_{1VU}(x)) & 0 \\ 0 & \rho_2(f_{2VU}(x)) \end{pmatrix}$$

によって定義されるベクトル束を，$\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{E}_2$ の **Whitney 和**といい $\boldsymbol{E}_1\oplus\boldsymbol{E}_2$ と表す．

例 10. ユニタリ群 $U(n)$ は，Lie 代数 $\mathfrak{u}(n)$ が随伴表現に関して不変な直和分解 $\mathfrak{u}(n)=\mathfrak{c}\oplus\mathfrak{su}(n)$ をもち，かつ，$\mathfrak{u}(n)$ の任意の元 $X=X_C+X_S$ $(X_C\in\mathfrak{c},\ X_S\in\mathfrak{su}(n))$ に対して

$$Ad(g)X=X_C+Ad(g)X_S,\quad (Ad(g)X_S\in\mathfrak{su}(n))$$

という形で作用する．したがって，この場合における主ファイバー束 P の随伴束 $\mathfrak{g}_P$ は，1 次元の $U(n)$-直積実ベクトル束と $U(n)$-ベクトル束 $P\times_{Ad}\mathfrak{su}(n)$ の Whitney 和として表すことができる．

次にテンソル積を定義しよう．

一次変換のテンソル積によって，ベクトル空間のテンソル積上の表現が定まる．G_1-ベクトル束 $\boldsymbol{E}_1$ と，G_2-ベクトル束 $\boldsymbol{E}_2$ に対して，変換関数

$$U\cap V \longrightarrow GL(E_1\otimes E_2);\quad x \longmapsto \rho_1(f_{1VU}(x))\otimes\rho_2(f_{2VU}(x))$$

によって定義されるベクトル束を，$\boldsymbol{E}_1$ と $\boldsymbol{E}_2$ の**テンソル積束**といい，$\boldsymbol{E}_1\otimes\boldsymbol{E}_2$ と表す．

例 11. $\boldsymbol{E}$ を G-ベクトル束 $\boldsymbol{E}=P\times_\rho E$ とし，ベクトル空間 E の線形変換全体を $\mathrm{End}(E)$ で表す．

E 上の G の表現 ρ から $\mathrm{End}(E)$ 上の表現が自然に誘導される；

$$(\rho(g)f)(\xi)=\rho(g)f(\rho(g^{-1})\xi),\qquad g\in G,\ f\in\mathrm{End}(E),\ \xi\in E$$

これも同じ記号 ρ で表すことにして，ベクトル束

$$\mathrm{End}(\boldsymbol{E})=P\times_\rho\mathrm{End}(E)$$

を $\boldsymbol{E}$ の**自己準同型束**という．$\mathrm{End}(\boldsymbol{E})$ はテンソル積束 $\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}^*$ と同型である．

ベクトル束 $\boldsymbol{E}\xrightarrow{\pi_1}M$ においても，開集合 $U\subset M$ における C^∞ 写像

$$\eta:U\longrightarrow\boldsymbol{E},\ \pi_1\circ\eta=id_U\ \ (U\text{の恒等写像})$$

を，U 上の**切断**という．$\boldsymbol{E}$ における U 上の切断全体を $\Gamma(U;\boldsymbol{E})$ で表すと，$\Gamma(U;\boldsymbol{E})$ はベクトル空間となる．

また，$h=\{h_x;x\in M\}$ は，各 h_x がファイバー $\boldsymbol{E}_x$ 上の正定値内積であって，x を含む近傍上の任意の切断 ξ，η に対して，$p\longmapsto h_p(\xi(p),\eta(p))$ が p の C^∞ 関数であるとき，h を $\boldsymbol{E}$ 上の**ファイバー計量**という．
この h を用いて

$$h(\xi,\eta)=\int_M h(\xi,\eta)(x)dv,\ \ \xi,\eta\in\Gamma(M;\boldsymbol{E})$$

と定義すれば，$\Gamma(M;\boldsymbol{E})$ は内積をもつベクトル空間となる．

問 9. $O(n)$-ベクトル束 $\boldsymbol{E}$ 上には自然な形でファイバー計量が定義される．これを示せ．[$U(n)$-ベクトル束の場合も同様である.]

G-ベクトル束 $\boldsymbol{E}=P\times_\rho E$ に対して，その変換関数は $\rho(f_{VU})$ で与えられる．$\boldsymbol{E}$ の部分ベクトル空間 F があって，すべての $\rho(f_{VU})$ が F を不変にするならば，ベクトル束 $\boldsymbol{F}=P\times_\rho F$ が定義される．この $\boldsymbol{F}$ を $\boldsymbol{E}$ の**部分ベクトル束**という．さきの例で見たように，$U(n)$-主ファイバー束 P に同伴したベクトル束 $P\times_{Ad}\mathfrak{su}(n)$ は，随伴束 $\mathfrak{g}_P=P\times_{Ad}\mathfrak{u}(n)$ の部分ベクトル束である．

f を C^∞ 多様体 M から N への C^∞ 写像とし，ベクトル束 $\boldsymbol{E}\xrightarrow{\pi_N}N$ に対して，次のような直積集合 $M\times\boldsymbol{E}$ の部分集合を考える．

$$f^*\boldsymbol{E}=\{(x,\xi)\in M\times\boldsymbol{E},\ f(x)=\pi_N(\xi)\}$$

$\boldsymbol{E}$ の局所自明近傍 $U\subset N$ の逆像 $f^{-1}(U)\subset M$ 上の $f^*\boldsymbol{E}$ は $f^{-1}(U)\times E$ と微分同相であり，$f^*\boldsymbol{E}$ の変換関数は $\rho(f_{VU}(f(x)))$，$x\in f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)$ で与

えられる．f^*E を，E の f による**ひきもどし**という．

ベクトル空間 E が複素ベクトル空間の場合にも，これまでの議論はほとんどすべて平行に行うことができる．

例 12. 特殊ユニタリ群 $SU(n)$ は，n 次元複素数空間 $\boldsymbol{C}^n$ 上に自然な表現をもつ．$\mathrm{End}(\boldsymbol{C}^n)$ は標準基底に関する n 次複素正方行列全体 $\mathfrak{gl}(n;\boldsymbol{C})$ と一致する．

(i) Hermite 対称行列 X(すなわち $X={}^t\bar{X}$) の純虚数倍が Hermite 歪対称行列 Y(すなわち $Y+{}^t\bar{Y}=0$) になるという事実から，$\mathfrak{gl}(n;\boldsymbol{C})$ は

$$\mathfrak{gl}(n;\boldsymbol{C})=\boldsymbol{R}I_n\oplus\boldsymbol{R}\sqrt{-1}\,I_n\oplus\mathfrak{su}(n)\oplus\sqrt{-1}\,\mathfrak{su}(n)$$

という分解をもつ．

ここに

$$\boldsymbol{R}I_n=\{cI_n\,;\,c\in\boldsymbol{R}\},\quad \boldsymbol{R}\sqrt{-1}\,I_n=\{c\sqrt{-1}\,I_n\,;\,c\in\boldsymbol{R}\}$$

$$\sqrt{-1}\,\mathfrak{su}(n)=\{\sqrt{-1}\,X\,;\,X\in\mathfrak{su}(n)\}$$

この分解は，$SU(n)$ の随伴表現に関して不変である．

(ii) $G=SU(n)$ のとき，主ファイバー束 $P=P(M,G)$ に同伴したベクトル束 $\boldsymbol{E}=P\times_\rho\boldsymbol{C}^n$ の自己準同型束 $\mathrm{End}(\boldsymbol{E})$ は，次のような，G-ベクトル束としての分解をもつ．

$$\mathrm{End}(\boldsymbol{E})=\boldsymbol{1}\oplus\sqrt{-1}\,\boldsymbol{1}\oplus\mathfrak{g}_P\oplus\sqrt{-1}\,\mathfrak{g}_P$$

ここに，$\boldsymbol{1}$ は 1 次元直積実ベクトル束 $P\times_\rho\boldsymbol{R}I_n$

$$\sqrt{-1}\,\boldsymbol{1}=P\times_\rho\boldsymbol{R}\sqrt{-1}\,I_n,\quad \sqrt{-1}\,\mathfrak{g}_P=P\times_{Ad}\sqrt{-1}\,\mathfrak{su}(n)$$

2.4 多様体の接ベクトル束・k-形式のなす束

M を n 次元 C^∞ 多様体とするとき，第 1 章で定義した

$$TM=\bigcup_{x\in M}T_xM,\quad \Lambda^kM=\bigcup_{x\in M}\Lambda^k(T_xM)$$

などは，M のフレーム束 $L(M)$ に同伴したベクトル束である．

実際，$\boldsymbol{R}^n$ 上の $GL(n;\boldsymbol{R})$ の自然な表現を ρ とすると，双対ベクトル空間 $(\boldsymbol{R}^n)^*$ 上に双対表現 ρ^* がひき起こされる．さらに，$\boldsymbol{R}^n$ 上の k-交代形式の全体 $\Lambda^k(\boldsymbol{R}^n)$ 上にも表現が定義されるから，これを $\Lambda^k\rho^*$ で表す．表現 $\Lambda^k\rho^*$ は

$$((\Lambda^k \rho^*(g))\theta)(X_1, \cdots, X_k) = \theta(\rho^{-1}(g)X_1, \cdots, \rho^{-1}(g)X_k)$$
$$X_1, \cdots, X_k \in \boldsymbol{R}^n, \quad \theta \in \Lambda^k(\boldsymbol{R}^n), \quad g \in GL(n; \boldsymbol{R})$$

で与えられる.

フレーム束 $L(M)$ に同伴したベクトル束

$$L(M) \times_\rho \boldsymbol{R}^n, \quad L(M) \times_{\rho_*} (\boldsymbol{R}^n)^*, \quad L(M) \times_{\Lambda^k \rho^*} \Lambda^k(\boldsymbol{R}^n)$$

はそれぞれ $T(M)$, $T^*(M)$, $\Lambda^k(M)$ となる.

ベクトル束 $T(M)$ を M の**接ベクトル束**, $T(M)$ の双対ベクトル束 $T^*(M)$ を M の**余接ベクトル束**, $\Lambda^k(M)$ を M 上の **k-形式のなすベクトル束**という. $\Lambda^1(M) = T^*(M)$ である. これらの束の M 上の切断がそれぞれ M 上のベクトル場, 1-形式, k-形式であることはいうまでもない.

G-ベクトル束 $\boldsymbol{E}$ と $\Lambda^k(M)$ とのテンソル積束 $\boldsymbol{E} \otimes \Lambda^k(M)$ の切断は, $\boldsymbol{E}$ に値をもつ k-形式 ($\boldsymbol{E}$ 値 k-形式) とよばれる. M 上で定義された $\boldsymbol{E}$ 値 k-形式の全体 $\Gamma(M; \boldsymbol{E} \otimes \Lambda^k(M))$ を $\Omega^k(\boldsymbol{E})$ で表す. $\Omega^k(\boldsymbol{E})$ は $C^\infty(M)$-加群である.

$\boldsymbol{E}$ 値 k-形式を局所的に表現してみよう.

$\boldsymbol{E}$ として随伴束 $\mathfrak{g}_P$ をとり, $k=2$ とする. 束 $\mathfrak{g}_P$ の局所自明近傍 U 上には底空間 M の座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ が与えられていると仮定してよい. (局所自明近傍と局所座標近傍の共通部分を U とすればよい.) $\mathfrak{g}_P$ 値 2-形式 Φ は, 局所的には U 上で定義された i, j について交代的な n^2 個の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ への C^∞ 写像 $\Phi_{U,ij} : U \longrightarrow \mathfrak{g}$ である.

別の局所自明近傍を V とし, そこでの座標系を $(y^1, \cdots, y^n)$, V 上での Φ を $\Phi_{V,ij} : V \longrightarrow \mathfrak{g}$ とすると, Φ が M 上で定義された, $\mathfrak{g}_P \otimes \Lambda^2(M)$ の切断であるということから, $x \in U \cap V$ において

$$\Phi_{V,ij}(x) = \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}(x) \frac{\partial x^l}{\partial y^j}(x) Ad(f_{VU}(x)) \Phi_{U,kl}(x) \tag{2.4.1}$$

となる. ここに, f_{VU} は主ファイバー束の変換関数である.

$$\Phi_U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Phi_{U,ij} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i<j} \Phi_{U,ij} dx^i \wedge dx^j$$

とおけば, Φ_U は U 上で定義され, Lie 代数に値をもつ 2-形式であり, Φ_U と Φ_V の間には

$$\Phi_V(x) = Ad(f_{VU}(x)) \Phi_U(x) \qquad x \in U \cap V \tag{2.4.2}$$

という関係がある．

逆に，(2.4.2) をみたす $\mathfrak{g}$ 値 2-形式 $\Phi_U, \Phi_V, \cdots$ 等の族 $\{\Phi_U, \Phi_V, \cdots\}$ は $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ の元を定めることは容易に示される．

とくに，構造群 G が線形 Lie 群の場合には，(2.4.2) は次のように表される．

(2.4.3) $\Phi_V(x) = f_{VU}(x)\Phi_U(x)f_{VU}^{-1}(x) = f_{UV}^{-1}(x)\Phi_U(x)f_{UV}(x)$

第3章　ファイバー束と接続

3.1　主ファイバー束上の接続

この章では，底空間MをC^∞多様体，構造群GをLie群として，主ファイバー束$P=P(M,G)$上の接続と曲率形式を定義する．

議論の見通しをよくするため，構造群Gはことわりがない限り線形Lie群とする．

定義 3.1.1　G–主ファイバー束$P\xrightarrow{\pi}M$に対して，$\{U, V, W, \cdots\}$をPの局所自明近傍から成るMの開被覆とする．U, V, W等の上で定義されたLie代数$\mathfrak{g}$に値をもつ1–形式の族$A=\{A_U, A_V, A_W, \cdots\}$は，コサイクル条件

(3.1.1)　$$(A_V)_x=f^{-1}(x)(df)_x+f^{-1}(x)\cdot(A_U)_x\cdot f(x), \quad x\in U\cap V$$
　　　($f=f_{UV}=f_{VU}^{-1}$はPの変換関数)

をみたすときPの**接続**という．

コサイクル条件(3.1.1)の右辺第1項は，**純ゲージ項**(pure gauge)とよばれるもので，Lie群G上の標準1–形式θの，変換関数$f: U\cap V\longrightarrow G$による$U\cap V$上へのひきもどし$f^*\theta$にほかならない(第1章　1.10節)．

1–形式A_Uを接続形式という．物理学ではこれを**ゲージポテンシャル**とよんでいる．Gが一般のLie群の場合には，(3.1.1)は

(3.1.2)　$$(A_V)_x=(L_{f^{-1}(x)})_*f_{*x}+Ad(f^{-1}(x))(A_U)_x, \quad x\in U\cap V$$

と書き表される．これは，任意の接ベクトル$X\in T_xM$に対して

(3.1.3)　$$(A_V)_x(X)=(L_{f^{-1}(x)})_*(f_{*x})(X)+Ad(f^{-1}(x))(A_U)_x(X)$$

となるということである．

パラコンパクトなC^∞多様体上の主ファイバー束にはつねに接続が存在することが知られている([16])．

P上の二つの接続$A=\{A_U, A_V, \cdots\}$，$A'=\{A'_U, A'_V, \cdots\}$に対して，接続形式の差$A'_U-A_U$，$A'_V-A_V$等を考えると

$$(A'_V)_x-(A_V)_x=f^{-1}(x)\cdot\{(A'_U)_x-(A_U)_x\}\cdot f(x),\quad x\in U\cap V \tag{3.1.4}$$

という関係がある．したがって，$\{A'_U-A_U,\ A'_V-A_V,\cdots\}$ は P の随伴束 $\mathfrak{g}_P$ に値をもつ1-形式とみなすことができる（第2章　2.4節）．これを $A'-A$ で表すと，$A'-A\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ である．

逆に，$\mathfrak{g}_P$ 値1-形式 a と P 上の接続 A の和 $A+a=\{A_U+a_U, A_V+a_V,\cdots\}$ が P 上の接続を定めることは容易に確かめられる．

M 上の $\mathfrak{g}_P$ 値1-形式全体のなす空間 $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ はベクトル空間の構造をもつから，次の命題が成り立つ．

命題 3.1.2 主ファイバー束 P 上の接続全体の集合を $\mathcal{A}_P$ で表すと，$\mathcal{A}_P$ は $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ をベクトル空間とするアファイン空間である．

注 1 アファイン空間 ベクトル空間 E を加法群とみなすとき，集合 X 上で，E の右からの作用 $(p,a)\longmapsto p+a$ $(p\in X,\ a\in E)$ が定義されていて，この作用が推移的かつ自由ならば，X は E をベクトル空間とするアファイン空間という．

主ファイバー束上の接続の例としては，Riemann 多様体上のフレームに関する接続（第1章　1.9節）があげられる．n 次元 Riemann 多様体 (M,h) の開集合 U を定義域とする正規直交フレーム $s=(X_1,\cdots,X_n)$ は，直交フレーム束 $O(M)\xrightarrow{\pi}M$ の切断 $s:U\longrightarrow O(M)$ である．写像

$$\psi_s:\pi^{-1}(U)\longrightarrow U\times O(n);\ u\longmapsto(\pi(u),a)$$
$$(a \text{ は } u=sa \text{ で与えられる } O(n) \text{ の元})$$

が，$O(M)$ の局所自明写像を与えることに注意すると，第1章 (1.9.3) はフレームに関する接続形式 ω_U が $\mathfrak{so}(n)$ 値1-形式であることを示している．また，(1.9.6) はこれらの接続形式に関するコサイクル条件 (3.1.1) にほかならない．したがって，Levi-Civita 接続から定義された直交フレームに関する接続形式 ω_U の族は $O(M)$ 上の接続を与えていることになる．

例 1. $U(1)$-主ファイバー束上の接続 A は，$U(1)$ が可換群であるから

$$A_V=f^{-1}(x)df+A_U=ida+A_U,\quad (f=e^{ia},\ i=\sqrt{-1}) \tag{3.1.5}$$

と書くことができる．

定義3.1.1では，接続は局所的に定義された$\mathfrak{g}$値1-形式の族として与えられたが，これを主ファイバー束Pを定義域とする$\mathfrak{g}$値1-形式として定義することもできる．そのようにして定義したものを，本書ではEhresmannの意味での接続，あるいはEhresmann接続とよぼう．主ファイバー束PにはGが右から自由に作用していることに留意して，次の定義をする．

定義 3.1.3　G-主ファイバー束P上の$\mathfrak{g}$値1-形式$\bar{A}$が，次の2条件をみたすとき，$\bar{A}$をP上の**Ehresmann接続**という．

（i）Xによって生成されたP上の基本ベクトル場$X^{\#}$に対して

(3.1.6)
$$\bar{A}(X^{\#})=X,\quad X\in\mathfrak{g}$$
$$X_u^{\#}=\frac{d}{dt}(u\cdot\exp tX)\Big|_{t=0}$$

（ii）任意の$a\in G$に対して

(3.1.7)
$$R_a^*\bar{A}=Ad(a^{-1})\bar{A}$$

いいかえれば

(3.1.8)
$$\bar{A}_{ua}(R_{a*}(Y))=Ad(a^{-1})(\bar{A}_u(Y)),\quad Y\in T_uP$$

ここに，AdはGの$\mathfrak{g}$上への随伴表現である．

問 1.　$\bar{A},\bar{A}_1$がEhresmann接続ならば，$t\bar{A}+(1-t)\bar{A}_1$　$(t\in \boldsymbol{R})$　もEhresmann接続であることを示せ．

定理 3.1.4　主ファイバー束上のEhresmann接続の全体と$\mathcal{A}_P$とは集合として1対1の対応をもつ．

［**証明**］　$\bar{A}$をEhresmann接続とする．$\bar{A}$からコサイクル条件(3.1.1)をみたす局所的な$\mathfrak{g}$値1-形式の族$A=\{A_U, A_V, \cdots\}$が定義されることを示そう．

UをPの局所自明近傍，$\psi_U:\pi^{-1}(U)\longrightarrow U\times G$を$U$上の局所自明写像とすると，写像
$$\sigma_U:U\longrightarrow P;\ x\longmapsto \psi_U{}^{-1}(x,e)$$
はU上のPの切断を与える．このとき，$A_U=\sigma_U^*(\bar{A})$で与えられる$\mathfrak{g}$値1-形式の族$\{A_U, A_V, \cdots\}$は実際にコサイクル条件をみたすことが示される．

それを示すために，まず次の補題を証明しよう．

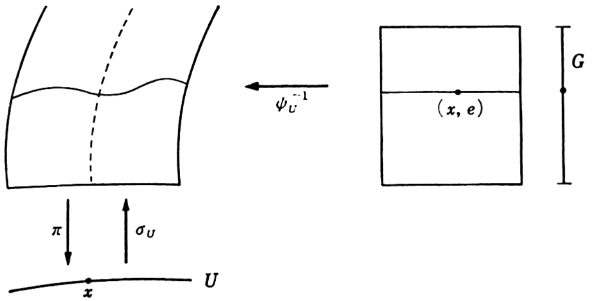


図 3.1 局所切断 σ_U

補題 局所切断 σ_U, σ_V の間には，$U\cap V \neq \phi$ ならば

(3.1.9) $$\sigma_V(x)=\sigma_U(x)f_{UV}(x) \quad x\in U\cap V$$

という関係がある．また，それらの微分写像については

(3.1.10) $$(\sigma_V)_*(Y)=(f^{-1}(x)(df(Y)))^{\#}+(R_{f(x)})_*(\sigma_{U*}(Y))$$
$$(Y\in T_xM,\ x\in U\cap V,\ f=f_{UV})$$

という関係がある．

〔**補題の証明**〕 σ_U の定義により

(3.1.11) $$\phi_U(\sigma_U(x))=(x, e), \quad x\in U$$

である．$x\in U\cap V$ に対して，$\sigma_U(x)$ と $\sigma_V(x)$ は同一のファイバー上にあるから，$\sigma_V(x)=\sigma_U(x)a$ なる $a\in G$ が存在する．(3.1.11) により，$e=\phi_V(\sigma_V(x))=\phi_V(\sigma_U(x))a$ である．ところが，変換関数の定義から $\phi_V(u)=f_{VU}(x)\phi_U(u)$ であるから

$$e=f_{VU}(x)\phi_U(\sigma_U(x))a=f_{VU}(x)a$$

すなわち，$a=f_{VU}(x)^{-1}=f_{UV}(x)$ である．

次に (3.1.10) を示そう．

接ベクトル $Y\in T_xM$ に対して，曲線 $\gamma(t)$ で $\gamma(0)=x$，$\dot{\gamma}(0)=Y$ なるものをとる．(3.1.9) を用いると

$$\sigma_{V*}(Y)=\frac{d}{dt}\sigma_V(\gamma(t))\Big|_{t=0}=\frac{d}{dt}\sigma_U(\gamma(t))f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$$

である．

Leibniz の公式（この節末の問2）を用いるとこれは次のようになる．

$$\frac{d}{dt}\sigma_U(x)\cdot f(\gamma(t))\Big|_{t=0}+\frac{d}{dt}\sigma_U(\gamma(t))\cdot f(x)\Big|_{t=0}$$
$$=\frac{d}{dt}\sigma_V(x)f^{-1}(x)f(\gamma(t))\Big|_{t=0}+(R_{f(x)})_*\sigma_{U*}(Y)$$

G 内の曲線 $t\longmapsto f^{-1}(x)f(\gamma(t))$ は，$t=0$ のとき e を通るから

$$f^{-1}(x)df(Y)=\frac{d}{dt}f^{-1}(x)f(\gamma(t))\Big|_{t=0}\in T_eG$$

（すなわち，Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の元）である．よって，上式の右辺第1項は基本ベクトル場 $(f^{-1}(x)df(Y))^{\#}$ の $u=\sigma_V(x)$ での値に等しい（補題の証明終り）．

さて，(3.1.10) の両辺を $\bar{A}$ に代入すれば，(3.1.6) と (3.1.7) により

$$A_V(Y)=f^{-1}(x)df(Y)+f^{-1}(x)\cdot A_U(Y)\cdot f(x),\qquad x\in U\cap V$$

すなわち，$\{A_U, A_V, \cdots\}$ はコサイクル条件をみたしている．

逆に，$A=\{A_U, A_V, \cdots\}\in\mathcal{A}_P$ を一つとると，任意の接ベクトル $Y\in T_xM$, $x\in M$ と，任意の $X\in\mathfrak{g}$ に対して，開集合 $\pi^{-1}(U)\subset P$ 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\bar{A}^U$ が

(3.1.12) $$\bar{A}^U(\sigma_{U*}(Y)+X^{\#})=A_U(Y)+X$$

によって定義される．

実際，$u=\sigma_U(x)\in P$ での任意の接ベクトルは，一意的に $(\sigma_U)_*(Y)+X^{\#}$ $(Y\in T_xM,\ X\in\mathfrak{g})$ という形に表されるから，$\bar{A}^U$ はこれによって T_uP 全体の上で定義されたことになる．$u=\sigma_U(x)$ 以外の同一ファイバー上の点 ua では $\bar{A}^U$ を

(3.1.13) $$\bar{A}^U(X_{ua})=Ad(a^{-1})\bar{A}^U(R_{a^{-1}*}X_{ua}),\qquad X_{ua}\in T_{ua}P$$

で定義すれば，$\bar{A}^U$ の定義は $\pi^{-1}(U)$ 全体でなされている．

次に，$\pi^{-1}(U\cap V)$ 上で $\bar{A}^U=\bar{A}^V$ であることを示そう．

そのためには，(3.1.13) によって，$\sigma_V(U\cap V)$ 上において $\bar{A}^U=\bar{A}^V$ であることが示されれば十分である．ところが，$X\in\mathfrak{g}$ に対しては

$$\bar{A}^U(X^{\#})=\bar{A}^V(X^{\#})=X$$

であるから

$$\bar{A}^U(\sigma_{V*}(Y))=\bar{A}^V(\sigma_{V*}(Y)),\qquad Y\in T_xM,\ x\in U\cap V$$

を示せばよい．ところで，(3.1.10) を用いると

$$\bar{A}^U(\sigma_{V*}(Y)) = f^{-1}(x)df(Y) + \bar{A}^U((R_{f(x)*})\sigma_{U*}(Y))$$
$$= f^{-1}(x)df(Y) + Ad(f^{-1}(x))\bar{A}^U(\sigma_{U*}(Y))$$
$$= f^{-1}(x)df(Y) + Ad(f^{-1}(x))A_U(Y)$$

となるが，(3.1.1) により，右辺は

$$A_V(Y) = \bar{A}^V(\sigma_{V*}(Y))$$

に等しい．よって，$\bar{A}^U$ は定義域 U の選び方によらず，P 全体で定義された 1-形式 $\bar{A}$ を与えることになる．

$\bar{A}$ が (3.1.6)，(3.1.7) をみたすことは明らかである．もちろん $\sigma_U{}^*\bar{A} = A_U$ である．

問 2. (**Leibniz の公式**) C^∞ 写像 $f: M_1 \times M_2 \longrightarrow N$ に対して，$x_i \in M_i$ $(i=1,2)$，$y=f(x_1,x_2)$ とする．M_i 上の曲線 $c_i(t)$，$c_i(0)=x_i$ $(i=1,2)$ に対して，曲線

$$f(c_1(t), c_2(t)),\ f(c_1(t), x_2),\ f(x_1, c_2(t))$$

はいずれも N 上の点 y を通る曲線である．これら三つの曲線上の点 y における接ベクトルの間には次の関係がある．

$$\frac{d}{dt} f(c_1(t), c_2(t))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(c_1(t), x_2)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt} f(x_1, c_2(t))\Big|_{t=0}$$

これを証明せよ．

問 3. σ を U 上の P の切断とすると，$u=\sigma(x)$ における接ベクトル空間 T_uP の元は $X^\# + \sigma_*(Y)$，$X \in \mathfrak{g}$，$Y \in T_xM$ と一意的に表されることを証明せよ．

3.2 接続の曲率形式

主ファイバー束上の接続に対して，曲率形式とよばれる 2-形式が定義される．

定義 3.2.1 G-主ファイバー束 $P \xrightarrow{\pi} M$ 上の接続 $A = \{A_U, A_V, \cdots\}$ に対して

$$F(A)_U = F_U = dA_U + \frac{1}{2}[A_U \wedge A_U] \tag{3.2.1}$$

で与えられる $\mathfrak{g}$ 値 2-形式の族 $F(A) = \{F_U, F_V, \cdots\}$ を，A の**曲率形式**という．

曲率形式 $F(A)$ は，記号的に

$$F(A) = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]$$

と表される．曲率形式は略して単に**曲率**ということもある．曲率形式は，物理学では**ゲージ場**（フィールド・ストレングス）とよばれている．

記号 $[A_U \wedge A_U]$ についての説明

局所的に定義された $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 A, B に対し $[A \wedge B]$ を次のように定義する．

$\{E_a\}_{1 \leq a \leq l}$ は $\mathfrak{g}$ の基底，A_a, B_a は実 1-形式として

$$A = \sum_a E_a \otimes A_a, \quad B = \sum_a E_a \otimes B_a$$

とするとき，$[E_a, E_b]$ で交換子積を表すと

(3.2.2) $$[A \wedge B] = \sum_{a,b} [E_a, E_b] \otimes A_a \wedge B_b$$

線形 Lie 群 G に対しては，交換子積は

$$[E_a, E_b] = E_a E_b - E_b E_a$$

である．したがって

$$\begin{aligned}[A \wedge B] &= \sum E_a E_b \otimes A_a \wedge B_b - \sum E_b E_a \otimes A_a \wedge B_b \\ &= \sum_a (E_a \otimes A_a) \wedge \sum_b (E_b \otimes B_b) + \sum_b (E_b \otimes B_b) \wedge \sum_a (E_a \otimes A_a)\end{aligned}$$

すなわち $$[A \wedge B] = A \wedge B + B \wedge A$$

この等式の右辺の外積は，行列の積と微分形式の外積を同時に行うので，一般に $A \wedge B = -B \wedge A$ とは限らない．

よって，構造群が線形 Lie 群の場合には $F(A)$ は

(3.2.3) $$F(A) = dA + A \wedge A$$

という形に書くこともできる．

注 2.　混乱のおそれがないときは，こんごテンソル積の記号⊗を省略することにする．

問 4.　$A = \sum_{i=1}^{n} A_i dx^i$，$B = \sum_{i=1}^{n} B_i dx^i$；$A_i, B_i \in \mathfrak{g}$ に対して

$$[A \wedge B] = \sum_{i,j} [A_i, B_j] dx^i \wedge dx^j$$

であることを示せ．

また，接ベクトル $X = \sum X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$，$Y = \sum Y^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ に対して

(3.2.4) $$[A \wedge B](X, Y) = [A(X), B(Y)] - [A(Y), B(X)]$$

であることを証明せよ．

問 5. 接続形式 $A=\sum_{i=1}^{n}A_i(x)dx^i$ $(A_i(x)\in\mathfrak{g})$ に対して

$$(3.2.5)\quad \begin{cases} F(A)=\dfrac{1}{2}\sum_{i,j}F_{ij}(x)dx^i{}_\wedge dx^j, & F_{ij}(x)=-F_{ji}(x) \\ F_{ij}(x)=\dfrac{\partial}{\partial x^i}A_j(x)-\dfrac{\partial}{\partial x^j}A_i(x)+[A_i(x),A_j(x)] \end{cases}$$

であることを示せ.

命題 3.2.2 曲率形式 $F(A)=\{F_U, F_V, \cdots\}$ については，次の関係式が成り立つ.

$U\cap V\neq\phi$ ならば，$U\cap V$ 上で

$$(3.2.6)\qquad F_V=Ad(f_{UV}{}^{-1})F_U=f_{UV}{}^{-1}\cdot F_U\cdot f_{UV}$$

いいかえれば，曲率形式は随伴束 $\mathfrak{g}_P$ 上に値をもつ 2-形式である．すなわち $F(A)\in\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ である.

〔**証明**〕 この証明には，外微分と行列の積を同時に行う計算が必要である.
$F_V=dA_V+A_V\wedge A_V$ に $A_V=f^{-1}df+f^{-1}\cdot A_U\cdot f$ を代入する.
まず，dA_V を計算すると

$$(3.2.7)\qquad \begin{aligned} dA_V&=df^{-1}\wedge df+f^{-1}\cdot ddf+df^{-1}\wedge A_U\cdot f \\ &\quad+f^{-1}\cdot dA_U\cdot f-f^{-1}\cdot A_U\wedge df \end{aligned}$$

また，$f^{-1}\cdot f=1$ を微分すると

$$(3.2.8)\qquad d(f^{-1})=-f^{-1}\cdot df\cdot f^{-1}$$

これを上式に代入して

$$(3.2.9)\qquad \begin{aligned} dA_V&=-f^{-1}\cdot df\cdot f^{-1}\wedge df-f^{-1}\cdot df\cdot f^{-1}\wedge A_U\cdot f \\ &\quad+f^{-1}\cdot dA_U\cdot f-f^{-1}\cdot A_U\wedge df \end{aligned}$$

また

$$(3.2.10)\qquad \begin{aligned} A_V\wedge A_V&=(f^{-1}df+f^{-1}\cdot A_U\cdot f)\wedge(f^{-1}df+f^{-1}\cdot A_U\cdot f) \\ &=f^{-1}df\wedge f^{-1}df+f^{-1}df\wedge f^{-1}\cdot A_U\cdot f \\ &\quad+f^{-1}\cdot A_U\wedge df+f^{-1}\cdot A_U\wedge A_U\cdot f \end{aligned}$$

ここで $df\cdot f^{-1}\wedge(\cdots\cdots)=df\wedge f^{-1}\cdot(\cdots\cdots)$ であるから (3.2.6) がえられる.

例 2. Riemann 多様体 (M, h) 上の Levi-Civita 接続の接続形式 ω は，直交フレーム束 $O(M) \xrightarrow{\pi} M$ の接続を定め（3.1 節），Riemann 曲率テンソルはその曲率形式を与えることがわかる（命題 1.9.2）．

例 3. $U(1)$-主ファイバー束 $P \xrightarrow{\pi} M$ 上の接続 A の曲率形式 $F(A)$ は，M 全体の上で定義された閉 2-形式を純虚数倍したものである．P の随伴束 $\mathfrak{g}_P$ は直積束

$$M \times \mathfrak{u}(1) = M \times \sqrt{-1}\boldsymbol{R}$$

となる（第2章 2.3 節の例）．$U(1)$ は可換群であるから，曲率 F_U は

$$F_U = dA_U + A_U \wedge A_U = dA_U$$

となり，U 上の完全 2-形式であり，また

$$F_V = f^{-1} \cdot F_U \cdot f = F_U$$

であるから，$F(A) = \{F_U, F_V, \cdots\}$ は大域的に定義された閉 2-形式である．したがって $\sqrt{-1}F(A)$ は M 上の閉実 2-形式，すなわち

$$\sqrt{-1}F(A) \in Z^2(M)$$

である．

この例からわかるように，構造群が可換群ならば，曲率 $F(A)$ は接続 A に対して 1 次式で表示されるが，非可換の場合は 2 次式である．

定義 3.2.3 主ファイバー束上の接続 A が**平坦**であるとは，その曲率形式が恒等的に 0，すなわち $F(A) = 0$ となることである．

命題 3.2.4 A を G-主ファイバー束 $P \xrightarrow{\pi} M$ 上の平坦な接続とする．このとき，任意の $x \in M$ に対して，x の近傍 $V \subset M$ と，C^∞ 写像 $f : V \longrightarrow G$ が存在して，$A = f^{-1}df$ と書ける．

注 3. 接続 A が局所的に $A = f^{-1}df$ と表されるとき，A は**純ゲージ的接続**とよばれる．A は G 上の標準 1-形式 θ の f によるひきもどしである（第1章 1.10 節）．第1章 (1.10.4) により

$$F(A)=dA+\frac{1}{2}[A\wedge A]=f^*d\theta+\frac{1}{2}[f^*\theta\wedge f^*\theta]$$
$$=f^*(d\theta+\frac{1}{2}[\theta\wedge\theta])=0$$

であるから，純ゲージ的接続は平坦である．

命題3.2.4はその逆がいえることを主張している．命題3.2.4は接続のホロノミー群と主ファイバー束の簡約定理（3.5節，定理3.5.2）によって証明される．

主ファイバー束 $P=P(M,G,\pi)$ 上の接続に対しては，上述のように曲率形式が定義されたが，Ehresmann 接続 $\bar{A}$ についても曲率形式 $F(\bar{A})$ を定義することができる．

P の接ベクトル空間 T_uP の部分ベクトル空間 $Q_u=\{Z\in T_uP;\ \bar{A}(Z)=0\}$ を**水平部分空間**，その元を**水平ベクトル**といい，u を通るファイバーに接する部分ベクトル空間 G_u を**垂直部分空間**，G_u の元を**垂直ベクトル**という．

$\bar{A}$ の定義から，P 上には**分布**，すなわち対応 $u\longmapsto Q_u$ が存在して，T_uP は次のような2つのベクトル空間の直和に分解される：

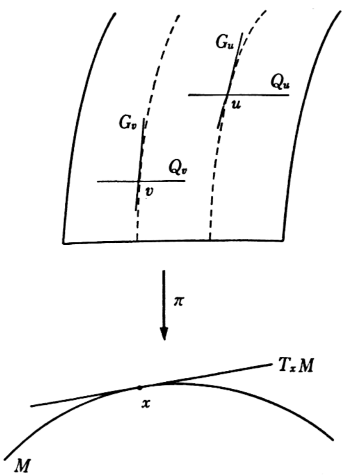


図 3.2 接空間の直和分解

$$T_uP=G_u+Q_u$$
$$Q_{ua}=R_{a*}Q_u,\qquad a\in G$$

したがって，任意の $X\in T_uP$ は

$$X=Y+Z,\ \ Y\in G_u,\ \ Z\in Q_u$$

と一意的にかける．X の水平成分 Z を hX で表す．

命題 3.2.5 主ファイバー束 P 上の分布 $u\longmapsto Q_u$ で，条件

$$T_uP=G_u+Q_u$$
（ベクトル空間としての直和）
$$Q_{ua}=R_{a*}Q_u$$

をみたすものが存在し，X が P 上の C^∞ ベクトル場ならば hX も C^∞ であるとする．

このとき，P 上の Ehresmann 接続 $\bar{A}$ で $\mathrm{Ker}\bar{A}=Q_u$ となるものが一意的に定まる（証明は，[16] 第2章 §1参照）．

P 上の Ehresmann 接続 $\bar{A}$ に対して，$d\bar{A}\circ h$ を $\bar{A}$ の曲率形式といい，$F(\bar{A})$ で表す．すなわち

$$F(\bar{A})(X, Y) = (d\bar{A})(hX, hY), \quad X, Y \in T_uP, \ u \in P$$

である．$F(\bar{A})$ は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に値をもつ P 上の 2-形式である．これについて，次の**構造方程式**が成り立つ．([16] 第2章 §5)

(3.2.11)
$$(d\bar{A})(X, Y) = -[\bar{A}(X), \bar{A}(Y)] + F(\bar{A})(X, Y)$$
$$X, Y \in T_uP, \ u \in P$$

注 4. 右辺の第1項に係数 $\frac{1}{2}$ がついている本もある．それは外微分の定義が本書と定数倍だけ異なっているためである．

上の式は，(3.2.4) を用いると

$$d\bar{A} + \frac{1}{2}[\bar{A} \wedge \bar{A}] = F(\bar{A})$$

と書ける．したがって Ehresmann 接続 $\bar{A}$ に対応する接続 $A = \{A_U, A_V, \cdots\}$ の曲率 $F(A) = \{F_U, F_V, \cdots\}$ は，$F(\bar{A})$ の，切断 σ_U によるひきもどしに一致する．

3.3 ベクトル束上の共変微分

主ファイバー束 P 上に接続が与えられると，次章では，P に同伴する随伴束 $\mathfrak{g}_P$ 上の共変微分という概念が必要になる．そのためまず本節では，一般のベクトル束上の共変微分の定義と，それに関連したことがらについて解説しておこう．

定義 3.3.1 $E \xrightarrow{\pi} M$ を C^∞ 多様体 M 上のベクトル束とする．線形写像 $D: \Omega^0(E) \longrightarrow \Omega^1(E)$ が次の条件をみたすとき，D を E 上の**共変微分**という．

(3.3.1) $$D(s+s') = Ds + Ds' \qquad s, s' \in \Omega^0(E)$$

(3.3.2) $$D(fs) = df \cdot s + fDs \qquad f \in C^\infty(M)$$

例 4. Riemann 多様体 (M, h) 上の Levi-Civita 接続による共変微分 ∇

は，M の接ベクトル束 $T(M)$ 上の共変微分を与える．

ベクトル場 $X\in\mathfrak{X}(M)=\Omega^0(T(M))$ に対しては，∇ を

$$\nabla X=\sum(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X)dx^i$$

で定義すればよい．

$A=\{A_U, A_V, \cdots\}$ を主ファイバー束 $P=P(M,G)$ 上の接続とすると，以下に見るように，P に同伴するベクトル束すべてに，接続 A によって自動的に共変微分が定義される．

$E=P\times_\rho E$ を P に同伴したベクトル束とする．ρ は G の E 上への表現である．ρ の微分表現 $\rho_*:\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{gl}(E)$ も同じ記号 ρ で表すことにすると，次の式によって，E 上の共変微分 D_A が定義される．

(3.3.3)
$$D_A:\Omega^0(E)\longrightarrow\Omega^1(E)$$
$$\phi=\{\phi_U,\phi_V,\cdots\}\longmapsto D_A\phi=\{(D\phi)_U,(D\phi)_V,\cdots\}$$

ここに，
$$(D\phi)_U=d(\phi_U)+\rho(A_U)\cdot\phi_U$$

A_U は $\mathfrak{g}$ 値 1-形式であるが，$\rho(A_U)\cdot\phi_U$ の意味は明らかである．実際，接ベクトル X を代入したときの $(D\phi)_U$ の値は

$$(D\phi)_U(X)=(d(\phi_U))(X)+\rho(A_U(X))\phi_U$$

となる．(3.3.3) の $D_A\phi$ が E 値 1-形式となることは次のことからわかる．

$U\cap V\neq\phi$ ならば，$U\cap V$ 上で ϕ は $\phi_V=\rho(f^{-1})\phi_U$ (ここに，$f=f_{UV}$) をみたし

$$\begin{aligned}
&d(\phi_V)+\rho(A_V)\phi_V\\
&=d(\rho(f^{-1})\phi_U)+\{\rho(f^{-1}df)+\rho(f^{-1})\rho(A_U)\rho(f)\}\rho(f^{-1})\phi_U\\
&=(d\rho(f^{-1}))\phi_U+\rho(f^{-1})d\phi_U+\{\rho(f^{-1}df)\rho(f^{-1})+\rho(f^{-1})\rho(A_U)\}\phi_U\\
&=\rho(f^{-1})(d\phi_U+\rho(A_U)\phi_U)\\
&=\rho(f^{-1})(D\phi)_U
\end{aligned}$$

となる．

共変微分 $D_A\phi$ は，記号的に

$$D_A\phi=d\phi+\rho(A)\phi$$

と書く．また，E の切断 ϕ が $D_A\phi=0$ となるとき，ϕ は**平行**であるという．

問 6.　(3.3.3) で定義された D_A が (3.3.1), (3.3.2) をみたすことを示せ.

例 5.　双対ベクトル束 $\boldsymbol{E}^*$ 上の共変微分 D_A は

$$D_A\xi = d\xi + \rho^*(A)\xi = d\xi - \xi\rho(A)$$

で与えられる. ただし, ここでは $\boldsymbol{E}^*$ の切断を行ベクトルとしてみる.

主ファイバー束 P に同伴した随伴束 $\mathfrak{g}_P$ は, 随伴表現

$$Ad : G \longrightarrow GL(\mathfrak{g})$$

によって自然に定義され, Ad の微分表現は

$$ad = Ad_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})\ ;\ \ X \longmapsto ad(X)$$

$$ad(X)Y = [X, Y],\ \ Y \in \mathfrak{g}$$

である (第1章　1.10節). そして, $\mathfrak{g}_P$ 上の共変微分 $D_A : \Omega^0(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ は

$$\Phi = \{\Phi_U, \Phi_V, \cdots\} \longmapsto D_A\Phi = \{(D\Phi)_U, (D\Phi)_V, \cdots\},$$

(3.3.4)
$$D\Phi_U = d\Phi_U + [A_U, \Phi_U]$$

で定義される.

微分形式に対する外微分の作用は, C^∞ 関数 f の微分 df の拡張であった. 共変微分 D_A についても, これと同様にその拡張として**共変外微分**

$$d_A : \Omega^k(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^{k+1}(\mathfrak{g}_P)$$

が定義される. すなわち, $\Omega^k(\mathfrak{g}_P) \ni \Phi$ に対して

(3.3.5)
$$d_A : \Phi \longmapsto d_A\Phi = d\Phi + [A \wedge \Phi] \in \Omega^{k+1}(\mathfrak{g}_P)$$

とする. 正確には, $\mathfrak{g}$ 値 k-形式の族 $\Phi = \{\Phi_U, \Phi_V, \cdots\}$ に対して, Φ の共変外微分として族 $\{d\Phi_U + [A_U \wedge \Phi_U], \cdots\}$ を定めるのである.

こんご, $d_A\Phi$ の意味が明らかで, 混乱のおそれがないときは, 適宜記号的に表すことにする. もちろん, $\Omega^0(\mathfrak{g}_P)$ 上では $d_A = D_A$ である.

ここで, (3.3.5) に現れる交換子積 $[A \wedge \Phi]$ についての説明をつけ加えておこう.

前に曲率形式の定義の際に, 1-形式どうしの交換子積 $[A \wedge B]$ を定義した (3.2節 (3.2.2)) が, ここでは一般の $\mathfrak{g}$ 値形式どうしの交換子積 $[\Phi \wedge \Psi]$ を定義する.

定義 3.3.2 双線形写像

$$[\cdot\wedge\cdot]:\Omega^k(\mathfrak{g}_P)\times\Omega^l(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow\Omega^{k+l}(\mathfrak{g}_P)$$

を次のように定義する：

$\Phi=\sum_a E_a\cdot\Phi_a\in\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$，$\Psi=\sum_b E_b\cdot\Phi_b\in\Omega^l(\mathfrak{g}_P)$ に対して

$$[\Phi\wedge\Psi]=\sum_{a,b}[E_a,E_b]\cdot\Phi_a\wedge\Psi_b \tag{3.3.6}$$

この交換子積には次の諸性質がある：

$\Phi\in\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$，$\Psi\in\Omega^l(\mathfrak{g}_P)$，$\Xi\in\Omega^m(\mathfrak{g}_P)$ として

$$[\Phi\wedge\Psi]=(-1)^{kl+1}[\Psi\wedge\Phi] \tag{3.3.7}$$

$$(-1)^{mk}[[\Phi\wedge\Psi]\wedge\Xi]+(-1)^{kl}[[\Psi\wedge\Xi]\wedge\Phi]+(-1)^{lm}[[\Xi\wedge\Phi]\wedge\Psi]=0 \tag{3.3.8}$$

$$d[\Phi\wedge\Psi]=[d\Phi\wedge\Psi]+(-1)^k[\Phi\wedge d\Psi]\qquad\text{(局所的)} \tag{3.3.9}$$

問 7. (i) (3.3.9) から，$\Phi,\Psi\in\Omega^0(\mathfrak{g}_P)$ に対して

$$D_A[\Phi_\wedge\Psi]=[D_A\Phi_\wedge\Psi]+[\Phi_\wedge D_A\Psi] \tag{3.3.10}$$

であることを示せ．

(ii) $\mathrm{Ker}D_A=\{\Phi\in\Omega^0(\mathfrak{g}_P);\ D_A\Phi=0\}$ は Lie 代数 $\Omega^0(\mathfrak{g}_P)$ の Lie 部分代数であることを示せ．

随伴束 $\mathfrak{g}_P$ 上の共変外微分 d_A について次の命題がある．

命題 3.3.3 任意の接続 A に対して，次の等式が成り立つ．

$$d_Ad_A\Phi=[F(A)\wedge\Phi],\ \Phi\in\Omega^k(\mathfrak{g}_P)\qquad\text{(Ricci の公式)} \tag{3.3.11}$$

$$d_AF(A)=0\qquad\text{(Bianchi の公式)} \tag{3.3.12}$$

〔**証明**〕 (3.3.11) は一般の k-形式に対して成り立つが，ここでは $\mathfrak{g}_P$ 値 1-形式 Φ の場合について証明しよう．

$$\begin{aligned}d_A(d_A\Phi)&=d(d_A\Phi)+[A\wedge(d_A\Phi)]\\&=d[A\wedge\Phi]+[A\wedge d\Phi]+[A\wedge[A\wedge\Phi]]\end{aligned}$$

A が 1-形式であることから，(3.3.9) によりこれは

$$[dA\wedge\Phi]+[A\wedge[A\wedge\Phi]]$$

となる．ところが (3.3.8) により

$$[A\wedge[A\wedge\Phi]]+[A\wedge[\Phi\wedge A]]+[\Phi\wedge[A\wedge A]]=0$$

すなわち

$$[A\wedge[A\wedge\Phi]]=-\frac{1}{2}[\Phi\wedge[A\wedge A]]=\frac{1}{2}[[A\wedge A]\wedge\Phi]]$$

したがって

$$d_A d_A\Phi=[dA\wedge\Phi]+\left[\frac{1}{2}[A\wedge A]\wedge\Phi\right]=[F(A)\wedge\Phi]$$

次に (3.3.12) を証明する．これも局所的に示せば十分である．

$$\begin{aligned}d_AF(A)&=dF(A)+[A\wedge F(A)]\\&=d\left(dA+\frac{1}{2}[A\wedge A]\right)+[A\wedge dA]+\frac{1}{2}[A\wedge[A\wedge A]]\\&=\frac{1}{2}[dA\wedge A]-\frac{1}{2}[A\wedge dA]+[A\wedge dA]+\frac{1}{2}[A\wedge[A\wedge A]]\end{aligned}$$

となるが，$[dA\wedge A]=-[A\wedge dA]$ であるから

(3.3.13) $$d_AF(A)=\frac{1}{2}[A\wedge[A\wedge A]]$$

(3.3.8) において，$\Phi=\Psi=\Xi=A$ とおけば

(3.3.14) $$[A\wedge[A\wedge A]]=0$$

よって $$d_AF(A)=0$$

注 5. (i) C^∞ 多様体上の普通の外微分 d については $d\circ d=0$ であるが，共変外微分の場合は $d_A\circ d_A$ に曲率形式を含む項があらわれる．

(ii) (3.3.12) は，Riemann 多様体 (M,h) における曲率テンソルの Bianchi の第2恒等式に対応するものである（第1章 1.7節 (1.7.7) または (1.7.11)）．

問 8. 接続 A に対して，$a\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ とすれば，$A+a$ の曲率 $F(A+a)$ は

(3.3.15) $$F(A+a)=F(A)+d_Aa+\frac{1}{2}[a\wedge a]$$

となることを示せ．

さて，主ファイバー束 P 上の接続 A から，$\Omega^k(\mathfrak{g}_P)=\Gamma(M;\ \mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^k(M))$ 上に共変微分 D_A や共変外微分 d_A が定義されたが，同様に A から一般の $\mathfrak{g}_P$ 値テンソル場に対しても共変微分 $\tilde{D}_A$ が定義される．この場合は，底空間であ

る Riemann 多様体の，例えば Levi-Civita 接続に関する共変微分 ∇ を補正項としてつけ加えなくてはならない．

例えば，タイプ $(0,2)$ のテンソル場に対しては

$$\tilde{D}_A : \Gamma(M;\ \mathfrak{g}_P \otimes T^{0,2}(M)) \longrightarrow \Gamma(M;\ \mathfrak{g}_P \otimes T^{0,3}(M)) \tag{3.3.16}$$

を次のように定義する：

$\Phi = \sum_{i,j} \Phi_{ij} dx^i \otimes dx^j$ に対して

$$\begin{aligned} \tilde{D}_A \Phi &= \sum_{i,j,k} \tilde{D}_k \Phi_{ij}\, dx^k \otimes dx^i \otimes dx^j \\ \tilde{D}_k \Phi_{ij} &= \nabla_k \Phi_{ij} + [A_k, \Phi_{ij}] \qquad 1 \leqq i, j, k \leqq n = \dim M \end{aligned} \tag{3.3.17}$$

とする．ここに，Φ_{ij} は局所的な $\mathfrak{g}$ 値 C^∞ 関数，A_k は接続形式 $A = \sum_j A_j dx^j$ の dx^k に関する成分で $\mathfrak{g}$ の元である．また

$$\nabla_k \Phi_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} \Phi_{ij} - \sum \begin{Bmatrix} l \\ ki \end{Bmatrix} \Phi_{lj} - \sum \begin{Bmatrix} l \\ kj \end{Bmatrix} \Phi_{il}$$

である．ここで

$$D_k \Phi_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^k} \Phi_{ij} + [A_k, \Phi_{ij}] \tag{3.3.18}$$

と定めると，$\tilde{D}_k \Phi_{ij}$ は

$$\tilde{D}_k \Phi_{ij} = D_k \Phi_{ij} - \sum_l \begin{Bmatrix} l \\ ki \end{Bmatrix} \Phi_{lj} - \sum_l \begin{Bmatrix} l \\ kj \end{Bmatrix} \Phi_{il} \tag{3.3.19}$$

と書くことができる．

Levi-Civita 接続 ∇ が対称であることに注意すれば，共変外微分 d_A は共変微分 $\tilde{D}_A$ を用いて表現することができる．

実際，$\Psi \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ に対して，$d_A \Psi$ は局所的に

$$\begin{aligned} d_A \Psi &= d\Psi + [A \wedge \Psi] \\ &= \sum_{i<j} (D_i \Psi_j - D_j \Psi_i) dx^i \wedge dx^j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (D_i \Psi_j - D_j \Psi_i) dx^i \wedge dx^j \end{aligned}$$

と表示されるが，これは

$$d_A \Psi = \frac{1}{2} \sum (\tilde{D}_i \Psi_j - \tilde{D}_j \Psi_i) dx^i \wedge dx^j \tag{3.3.20}$$

と表すことができる．

また，交換子積 $[D_i, D_j]$ を

$$[D_i, D_j] \Phi_{k_1 k_2} = D_i D_j \Phi_{k_1 k_2} - D_j D_i \Phi_{k_1 k_2} \tag{3.3.21}$$

と定義すると，Ricci の公式 (3.3.11) は

$$[D_i, D_j]\Phi_{k_1k_2}=[F_{ij}, \Phi_{k_1k_2}] \tag{3.3.22}$$

となる．ここに，F_{ij} は曲率形式 $F(A)$ の成分である．

同じように，交換子積 $[\tilde{D}_i, \tilde{D}_j]$ は，Riemann 曲率テンソルの Ricci の公式（第1章 1.7節，(1.7.14)）を用いると次のように表される；

$$[\tilde{D}_i, \tilde{D}_j]\Phi_{k_1k_2}=[F_{ij}, \Phi_{k_1k_2}]-\sum_t R^t_{k_1ij}\Phi_{tk_2}-\sum_t R^t_{k_2ij}\Phi_{k_1t} \tag{3.3.23}$$

問 9. (3.3.23) を証明せよ．

3.4 接続とゲージ変換

主ファイバー束 $P=P(M,G)$ 上の接続全体の集合は $\mathcal{A}_P$ で表され，自己同型束 $G_P=P\times_{Ad}G$ の M 上の C^∞ 切断がゲージ変換であり，ゲージ変換全体のなす群 $\mathcal{G}_P=\Gamma(M;\ G_P)$ がゲージ変換群である（第2章 2.2節）が，この $\mathcal{G}_P$ の $\mathcal{A}_P$ への作用は次のように定義される；

$$\mathcal{G}_P\times\mathcal{A}_P\longrightarrow\mathcal{A}_P$$
$$(g, A)\longmapsto g^*(A)=\{(g^*A)_U, (g^*A)_V, \cdots\}$$

ここに

$$(g^*A)_U=g_U{}^{-1}d(g_U)+Ad(g_U{}^{-1})(A_U) \tag{3.4.1}$$
$$g=\{g_U, g_V, \cdots\},\quad A=\{A_U, A_V, \cdots\}$$

である．

$g^*(A)$ を記号的に

$$g^*(A)=g^{-1}dg+Ad(g^{-1})A \tag{3.4.2}$$

と表そう．定義からわかるように，$\mathcal{G}_P$ の $\mathcal{A}_P$ への作用は，右からの作用であるが，慣習的に $g^*(A)$ と書かれる．

例 6. $G=SU(n)$ に対して，その中心 $Z(G)$ は $\mathcal{G}_P$ の（有限）部分群を定める（第2章 2.2節）が，$Z(G)$ は $\mathcal{A}_P$ に自明に作用する．すなわち

$$g^*(A)=A,\quad g\in Z(G),\quad A\in\mathcal{A}_P$$

$\mathcal{G}_P$ は $\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ にも作用する．すなわち，作用

$$\mathcal{G}_P\times\Omega^k(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$$
$$(g, \Phi)\longmapsto g^*(\Phi)=Ad(g^{-1})\Phi \tag{3.4.3}$$

が定義される．ここに，

$$g^*(\Phi)=\{Ad(g_U{}^{-1})\Phi_U,\ Ad(g_V{}^{-1})\Phi_V,\cdots\}$$
$$g=\{g_U,g_V,\cdots\},\ \Phi=\{\Phi_U,\Phi_V,\cdots\}$$

命題 3.4.1 曲率形式に関して，次の式が成り立つ．

(3.4.4) $$F(g^*(A))=g^*(F(A))\ \ (=Ad(g^{-1})F(A))$$

〔**証明**〕 $F(g^*(A))=d(g^{-1}dg+g^{-1}Ag)+(g^{-1}dg+g^{-1}Ag)\wedge(g^{-1}dg+g^{-1}Ag)$
これを書き直すと

$$F(g^*(A))=g^{-1}(dA+A\wedge A)g$$
$$=g^{-1}\cdot F(A)\cdot g=g^*(F(A))$$

問 10. $g\in\mathcal{G}_P$, $\Phi\in\Omega^0(\mathfrak{g}_P)$ のとき

$$D_{g^*(A)}g^*(\Phi)=g^*(D_A\Phi)$$

を導びけ．

この問から次のようなことが推察できる．$\mathfrak{g}_P$ の切断 Φ はゲージ変換 g によって，$g^*(\Phi)=Ad(g^{-1})\Phi$ に変換されるが，$g^*(\Phi)$ の“共変微分”が“随伴同変的”になるという要請をおくと，接続自体が g の変換を受けなくてはならなくなり，随伴同変的な項 $g^{-1}Ag=Ad(g^{-1})A$ と，g の微分 $g^{-1}dg$ の項から成る，別の接続がうまれる．

問 11. $\Phi\in\Omega^0(\mathfrak{g}_P)$ に対して，$g_t=\exp t\Phi$ は $\mathcal{G}_P$ 内の 1 パラメータ部分群を定め，そして次の等式が成り立つ．

(3.4.5) $$\frac{d}{dt}g_t{}^*(A)\Big|_{t=0}=D_A\Phi$$

これを証明せよ．

3.5 平行移動とホロノミー群

主ファイバー束 $P=P(M,G)$ に接続 A が与えられると，A に対応する Ehresmann 接続 $\bar{A}$ が C^∞ 多様体 P 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式として定まる（定理 3.1.4）．そして，ファイバーの平行移動という概念が，Levi-Civita 接続の平行

移動と同様に定義される．

P 内の曲線 $u(t)$ は，接ベクトル $\dot{u}(t)$ が任意の t について水平であるとき，水平曲線といわれる．

命題 3.5.1 区分的に C^∞ である M の曲線

$$\tau: [0,1] \longrightarrow M;\ t \longmapsto x(t)$$

と，$\pi^{-1}(x(0))$ の任意の点 u に対して，u を始点とする P の水平曲線

$$t \longrightarrow u(t),\ u(0)=u \text{ であって，}$$

$$\pi \circ u(t) = x(t),\ t \in [0,1]$$

となるものが一意的に定まる．

この $u(t)$ を，曲線 $\tau: x(t)$ の**水平もち上げ**という．

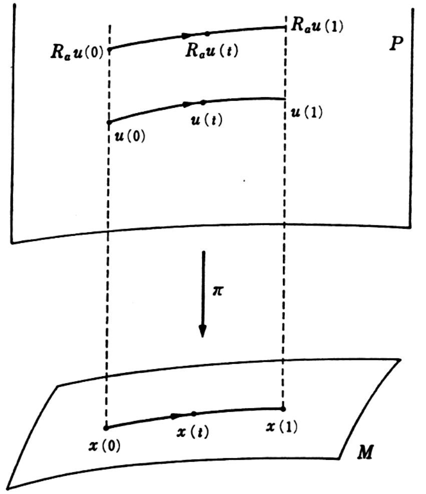


図 3.3 水平曲線

〔証明〕 P は局所自明的であるから，P 内の区分的に C^∞ である曲線 $v(t)$ で，$v(0)=u$ かつ $\pi\circ v(t)=x(t)$ となるものがとれる．もし，$x(t)$ の水平もち上げが存在したとすれば，それを $u(t)$ で表すと，$u(t)=v(t)a(t)$ となる G 内の曲線 $a(t)$ で $a(0)=e$ であるものが存在する．

Leibniz の公式 (3.1 節の問) により

$$\dot{u}(t) = \dot{v}(t)a(t) + v(t)a(t)a(t)^{-1}\dot{a}(t) \tag{3.5.1}$$

であるから，これを $\bar{A}$ に代入すると

$$\bar{A}(\dot{u}(t)) = Ad(a(t)^{-1})\bar{A}(\dot{v}(t)) + a(t)^{-1}\dot{a}(t) \tag{3.5.2}$$

したがって，$u(t)$ が水平になるための必要十分条件は

$$a(t)^{-1}\dot{a}(t) = -Ad(a(t)^{-1})\bar{A}(\dot{v}(t)) \tag{3.5.3}$$

すなわち

$$\dot{a}(t)a(t)^{-1} = -\bar{A}(\dot{v}(t)) \tag{3.5.4}$$

次の補題により，(3.5.4) をみたす曲線 $a(t)$ の存在と一意性が示される．

補題 G を Lie 群とし，$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする．

$\mathfrak{g}$ 内の C^∞ 曲線 $Y(t)$，$t\in[0,1]$ に対し G 内の C^∞ 曲線 $a(t)$，$t\in[0,1]$ で，

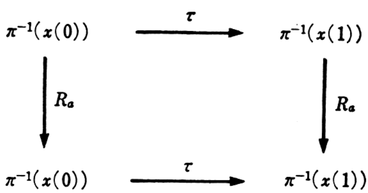
$a(0)=e$ であり，かつ，$\dot{a}(t)a(t)^{-1}=Y(t)$ をみたすものが一意的に存在する（証明は [16] を参照）.

写像 $\tau: \pi^{-1}(x(0)) \longrightarrow \pi^{-1}(x(1))$; $u=u(0) \longmapsto u(1)$

を曲線 τ に沿う平行移動という.

$$R_a{}^*(\bar{A})=Ad(a^{-1})\bar{A}, \quad a\in G$$

であるから，平行移動は右移動 R_a と可換，すなわち $\tau\circ R_a=R_a\circ\tau$ である.



区分的 C^∞ 曲線 τ と μ $(\tau(1)=\mu(0))$ に対して，積 $\mu\cdot\tau$ を次のように定義する.

$$(\mu\cdot\tau)(t)=\begin{cases}\tau(2t) & 0\leqq t\leqq\dfrac{1}{2}\\ \mu(2t-1) & \dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1\end{cases}$$

また，τ の逆の曲線 τ^{-1} を

$$\tau^{-1}(t)=\tau(1-t) \qquad 0\leqq t\leqq 1$$

によって定義する.

このとき，積 $\mu\cdot\tau$ に沿う平行移動は平行移動 τ と μ の合成に一致し，τ^{-1} に沿う平行移動は τ に沿う平行移動の逆になる.

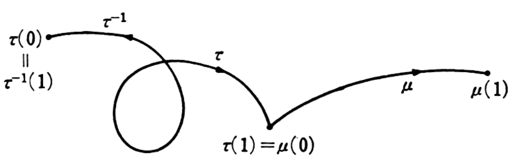


図 3.4 積 $\mu\cdot\tau$ と逆 τ^{-1}

M の点 x を始点終点とする区分的 C^∞ 閉曲線全体の集合 $C(x,x)$ に対して，$\tau,\mu\in C(x,x)$ ならば $\mu\cdot\tau\in C(x,x)$ である．元 $u\in\pi^{-1}(x)$ を固定すると，τ に沿った平行移動は $\tau(u)=u\cdot a$ となる $a\in G$ を定め，

$$\Phi_u=\{a\in G;\ \tau(u)=u\cdot a,\ \tau\in C(x,x)\}$$

は G の部分群となる．実際 $\mu(u)=u\cdot b$, $b\in G$ ならば

$$(\mu\cdot\tau)(u)=\mu(ua)=\mu(u)\cdot a=u(ba)$$

であり，$\tau^{-1}(ua)=u$ から，$\tau^{-1}(u)=u\cdot a^{-1}$ が導かれ，$a^{-1}\in\Phi_u$ である．

Φ_u を $u\in P$ に関する $\bar{A}$ の**ホロノミー群**という．

とくに，$C(x,x)$ の部分集合

$$C^0(x,x)=\{\tau\in C(x,x)\ ;\ \tau \text{は定値閉曲線} x \text{にホモトープ}\}$$

（第2章 定理 2.1.7 注）に対して定まる

$$\Phi_u{}^0=\{a\in G\ ;\ \tau(u)=u\cdot a,\ \tau\in C^0(x,x)\}$$

は**制限ホロノミー群**とよばれる．

ホロノミー群について，次の定理がある．

定理 3.5.2 $P(M,G)$ はパラコンパクト C^∞ 多様体 M 上の主ファイバー束とする．Ehresmann 接続 $\bar{A}$ のホロノミー群を Φ_u，制限ホロノミー群を $\Phi_u{}^0$ $(u\in P)$ とすると

（1） $\Phi_u{}^0$ は G の連結 Lie 部分群である．

（2） $\Phi_u{}^0$ は Φ_u の正規部分群である．

$\Phi_u/\Phi_u{}^0$ はたかだか可算個の元から成る群であり，Φ_u は，$\Phi_u{}^0$ を単位元 e を含む連結成分にもつ，G の Lie 部分群である（証明は［16］ 2章 §4 参照）．

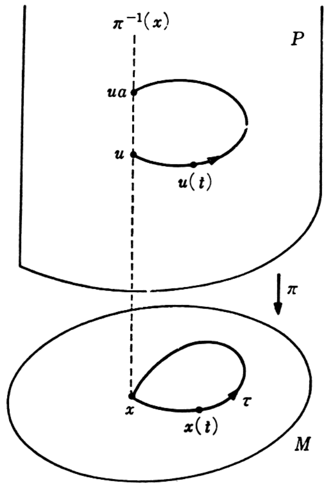


図 3.5 ホロノミー群

問 12. 次のことを証明せよ．

（1） $v=ua$ ならば $\Phi_v=a^{-1}\Phi_u a$

（2） u と v が水平曲線で結ばれていれば $\Phi_u=\Phi_v$

主ファイバー束の簡約定理を述べる前に，P の簡約束の定義をしておこう．

定義 3.5.3 $P=P(M,G)$ を主ファイバー束とする．G の Lie 部分群 H を構造群とする主ファイバー束 $Q=Q(M,H)$ に対して，次の条件をみたす埋めこみ $f: Q(M,H)\longrightarrow P(M,G)$ が存在するとき，$Q(M,H)$ は $P(M,G)$ の**簡約束**であるという．

$$f(ua)=f(u)a,\ \ u\in Q,\ \ a\in H$$

$$f \text{ は } M \text{ の恒等変換}$$

このとき，$P(M,G)$ の構造群 G は f によって H まで**簡約される**といい，写像 f を**簡約写像**とよぶ．

例 7. Riemann 多様体 (M,h) 上の直交フレーム束 $O(M)$ は，フレーム束$L(M)$ の簡約束である．この場合は構造群 $GL(n;\boldsymbol{R})$ が直交群 $O(n)$ まで簡約される．ただし，$n=\dim M$ である．

定理 3.5.4 連結な，パラコンパクト C^∞ 多様体 M 上の主ファイバー束を $P(M,G)$，P 上の Ehresmann 接続を $\bar{A}$，$u\in P$ と水平曲線で結ばれる $v\in P$ の全体を $P(u)$ とする．このとき

（1） $P(u)$ は，$P(M,G)$ の，Φ_u を構造群にもつ簡約束である．

（2） $\bar{A}$ は $P(u)$ の接続形式に簡約される．

すなわち，簡約写像 $f: P(u) \longrightarrow P$ に対して，$f^*(\bar{A})$ は Φ_u の Lie 代数に値をもつ（証明は [16] 第2章を参照）．

定義 3.5.5 主ファイバー束 P 上の接続 A に対応する Ehresmann 接続 $\bar{A}$ のホロノミー群が，構造群の開部分群となるとき，A は**既約**であるという．いいかえれば，ホロノミー群の Lie 代数が $\mathfrak{g}$ に一致するときに，A は既約であるという．既約でない接続は**可約**であるという．

注 6. ホロノミー群 Φ_u の Lie 代数については，次の定理が知られている（[16] 第2章§8）．

Φ_u を $P(u)$ の構造群と考えたとき，Φ_u の Lie 代数は $F(\bar{A})_v(X,Y)$ なる $\mathfrak{g}$ の元全体で張られる．ここに，$v\in P(u)$ で，X, Y は v における水平ベクトルである．

主ファイバー束 P 上の接続を A とするとき，ゲージ変換群 $\mathcal{G}_P$ の部分群 $\Gamma_A=\{g\in\mathcal{G}_P;\ g^*(A)=A\}$ を，A の**イソトロピー群**という．イソトロピー群と A に対応する Ehresmann 接続 $\bar{A}$ のホロノミー群の関係を論じて本節を終ることにしよう．

話を単純にするために，構造群 G は $SU(r)$ とする．$\mathcal{G}_P$ は P の自己同型写像のなす群 $\mathrm{Aut}_0(P)$ と群同型である（第2章　命題2.2.4）．部分群 Γ_A の元 g は $\mathrm{Aut}_0(P)$ の元を定めるが，これも同一記号 g で表すことにする．g は M

の恒等変換をひき起こすので，P の固定点 u に対して $g(u)=ub$ となる $b\in G$ を定める．Γ_A の各元に対して，このようにして定まる G の元 b の全体は，構造群 $G=SU(r)$ の部分群となるが，これを $(\Gamma_A)_u$ で表すことにする．もちろん $\Gamma_A \longrightarrow (\Gamma_A)_u;\ g \longmapsto b$ は群同型写像である（命題 3.5.7(i)）．

定理 3.5.6 A を P 上の接続とする．$C(\Phi_u)$ をホロノミー群 Φ_u $(u\in P)$ の $G=SU(r)$ での中心化群，すなわち $C(\Phi_u)=\{b\in G\,;\ ba=ab,\ a\in\Phi_u\}$ とすると $C(\Phi_u)=(\Gamma_A)_u$ である．

〔**証明**〕 はじめに $(\Gamma_A)_u\subset C(\Phi_u)$ であることを示そう．

$g\in\Gamma_A$ を P の自己同型写像とみなす．$g^*(A)=A$ であるから，g は A に対応する Ehresmann 接続 $\bar{A}$ を不変にする，すなわち $g^*(\bar{A})=\bar{A}$. 任意の $a\in\Phi_u$ に対して，a の定義により u と ua は水平曲線 $u(t)$，$t\in[0,1]$ で結ばれる．曲線 $g(u(t))$ を考えると

$$\bar{A}\left(g_*\frac{d}{dt}u\right)=(g^*\bar{A})\left(\frac{d}{dt}u\right)=\bar{A}\left(\frac{d}{dt}u\right)=0$$

であるから，$g(u(t))$ は $u\cdot b$ を始点とする水平曲線である．ここに，$b\in(\Gamma_A)_u$ は g に対応する元である．水平曲線の，初期条件に関する一意性（命題 3.5.1）によって $g(u(t))=u(t)\cdot b$，また，$t=1$ とおくと $g(ua)=(ua)b$ である．ところが g の定義により，$g(ua)=g(u)a=u(ba)$ であり，一方 G は P に自由に作用しているから，$ab=ba$ すなわち $(\Gamma_A)_u\subset C(\Phi_u)$ である．

次に $C(\Phi_u)\subset(\Gamma_A)_u$ であることを示そう．

$C(\Phi_u)\ni b$ に対して，$f_b\in\mathrm{Aut}(P)$ を次のように定める．

(3.5.5) $$f_b(uc)=ubc \qquad c\in G$$

および，$v\in P$ が u と水平曲線で結ばれているならば

(3.5.6) $$f_b(vc)=vbc \qquad c\in G$$

とする．(3.5.5) と (3.5.6) は矛盾しない．

なぜなら，$a\in\Phi_u$ に対して $f_b(ua)=uba$，他方 u と ua を結ぶ水平曲線 $u(t)$ に対して $u(1)=ua$ であるから，(3.5.6) により $f_b(u(1))=u(1)b=uab$ である．ところが a と b は可換なので $uab=uba$ となるからである．

f_b が C^∞ 写像であることは容易に確かめられる．また，$f_b\in\mathrm{Aut}_0(P)$ であ

る．

$f_b^*(A)=A$ であることを示そう．

そのためには，Ehresmann 接続 $\bar{A}$ に対して $f_b^*(\bar{A})=\bar{A}$ を示せば十分である．水平部分空間 Q_v の分布は T_vP を

$$T_vP=Q_v+G_v,\quad Q_v=\mathrm{Ker}\bar{A}_v$$

と，部分ベクトル空間の直和に分解する（3.3 節）．そこで，$Q_v\subset \mathrm{Ker} f_b^*(\bar{A})_v$ であることを示す．

$X\in Q_v$ に対して，v を通る水平曲線 $v(t)$ で，$\dot{v}(0)=X$ となるものをとると

$$f_b^*(\bar{A})(X)=f_b^*(\bar{A})(\dot{v}(0))=\bar{A}(f_{b*}(\dot{v}(0)))=\bar{A}\left(\frac{d}{dt}f_b(v(t))\Big|_{t=0}\right)$$

である．

$v'\in\pi^{-1}(\pi(v))$ は u と水平曲線 $v'(t)$ で結ばれているものとすると，$v=v'g$ $(g\in G)$ であるから $v(t)=v'(t)g$ と書けて，(3.5.6) により

$$f_b(v(t))=f_b(v'(t)g)=v'(t)bg$$

である．よって

$$\bar{A}\left(\frac{d}{dt}f_b(v(t))\Big|_{t=0}\right)=\bar{A}(R_{bg*}(v')(0))=Ad(bg)^{-1}\bar{A}(\dot{v}'(0))=0$$

一方，$\dim \mathrm{Ker} f_b^*(\bar{A})=n$ であるから，$Q_v=\mathrm{Ker} f_b^*(\bar{A})$，すなわち $v\longmapsto Q_v$ は $f_b^*(\bar{A})$ に対する水平部分空間から成る分布を与えている．命題 3.2.5 により，$f_b^*(\bar{A})=\bar{A}$ である．

$SU(r)$-主ファイバー束 P に同伴するベクトル束 $\boldsymbol{E}=P\times_\rho \boldsymbol{C}^r$ に関する自己準同型束 $\mathrm{End}(\boldsymbol{E})$ は，定義により $P\times_{Ad}\mathfrak{gl}(r;\boldsymbol{C})$ に一致する（第 2 章　2.3 節例 12）．Ad は $G=SU(r)$ の $\mathfrak{gl}(r;\boldsymbol{C})$ 上の表現 $X\longmapsto aXa^{-1}$ $(a\in SU(r))$ を表す．$SU(r)\subset\mathfrak{gl}(r;\boldsymbol{C})$，$\mathfrak{su}(r)\subset\mathfrak{gl}(r;\boldsymbol{C})$ であり，Ad のこれらの上への制限は，それぞれ群共役演算および随伴表現となるので，P の自己同型束 G_P，随伴束 $\mathfrak{g}_P$ は $\mathrm{End}(\boldsymbol{E})$ の部分束である．

P 上の接続 A がひき起こす $\mathrm{End}(\boldsymbol{E})$ 上の共変微分 D_A は

$$D_A\phi=d\phi+A\phi-\phi A=d\phi+[A,\phi]=d\phi+[A\wedge\phi]$$

である．共変微分 D_A を部分束 $\mathfrak{g}_P$ に制限したものは，もともと $\mathfrak{g}_P$ 上に定義されていた共変微分 d_A に一致する．

問 13.　(i)　$\mathrm{End}(\boldsymbol{E})$ 上に，線形写像

$$+ : \mathrm{End}(\boldsymbol{E}) \longrightarrow \mathrm{End}(\boldsymbol{E})\ ;\quad X \longmapsto X^+ = {}^t\bar{X}$$

が自然に定まることを示せ．

(ii)　このとき，部分束 G_P, $\mathfrak{g}_P$ は

$$G_P = \{X \in \mathrm{End}(\boldsymbol{E})\ ;\quad XX^+ = 1_E,\ \det X = 1\}$$

$$\mathfrak{g}_P = \{Y \in \mathrm{End}(\boldsymbol{E})\ ;\quad Y + Y^+ = 0,\ \mathrm{Tr}\,Y = 0\}$$

と書けることを証明せよ．

さて，ゲージ変換群 $\mathcal{G}_P = \Gamma(M;\ G_P)$ の元 g は $\mathrm{End}(\boldsymbol{E})$ の切断とみなすことができる．また，P 上の接続 A に対して，$g^*(A)$ は $g^*(A) = g^{-1}dg + g^{-1}Ag$ で与えられていた（(3.4.2)）．そして，これは

$$g^*(A) = g^{-1}dg + g^{-1}Ag = g^{-1}(dg + Ag)$$

$$= g^{-1}(dg + A\cdot g - g\cdot A) + A$$

と書き直せる．g を $\mathrm{End}(\boldsymbol{E})$ の切断とみると，これは

(3.5.7)　$$g^*(A) = A + g^{-1}D_A g$$

と書ける．

命題 3.5.7　接続 A のイソトロピー群を Γ_A とすると

(i)　ゲージ変換 g に対して，$g \in \Gamma_A$ ということと，g を $\mathrm{End}(\boldsymbol{E})$ の元とみて平行（$D_A g = 0$）であるということとは同値である．

(ii)　Γ_A の単位元（P の恒等変換）id での接ベクトル空間は，$\mathrm{Ker}\,D_A = \{\Phi \in \Omega^0(\mathfrak{g}_P)\ ;\quad D_A\Phi = 0\}$ に一致する．

〔**証明**〕　(i)　は (3.5.7) から明らかである．

(ii) の証明．$g(t)$ は Γ_A 内の曲線で，$g(0) = id$ であるとする．(i) によって $D_A g(t) = 0$ である．これを t について微分し，$t = 0$ とおくと $D_A \dot{g}(0) = 0$ となる．$\mathcal{G}_P$ の単位元での接ベクトル空間は $\Omega^0(\mathfrak{g}_P)$ に等しい（第2章　2.2節）から，$\dot{g}(0) \in \mathrm{Ker}\,D_A$ である．逆に $\Phi \in \mathrm{Ker}\,D_A$ とすると，1パラメータ部分群 $g(t) = \exp t\,\Phi$ は，G が線形 Lie 群 $SU(r)$ であることから

$$\exp t\,\Phi = I_r + t\Phi + \frac{t^2}{2}\Phi^2 + \cdots$$

で与えられる．

$g(t)$ が G_P の切断であることは容易に示される．

$$D_A g(t) = tD_A \Phi + \frac{t^2}{2}\{(D_A \Phi)\cdot\Phi + \Phi\cdot(D_A \Phi)\} + \frac{t^3}{3}\{(D_A \Phi)\cdot\Phi^2 + \cdots\} + \cdots$$

であるから，$g(t)$ は平行となり，(i) によって $g(t) \in \Gamma_A$ である．よって Γ_A の単位元での接ベクトル空間は $\mathrm{Ker} D_A$ に一致する．

ところで，定理 3.5.6 によれば，既約な接続 A のイソトロピー群 Γ_A は $C(\Phi_u) = C(SU(r)) = Z(SU(r))$ である．したがって Γ_A は有限群となり，命題 3.5.7 により $\mathrm{Ker} D_A = \{0\}$ となる．

逆に $\mathrm{Ker}\, D_A = \{0\}$ ならば，第 2 章 2.3 節の例によって $\mathrm{End}(\boldsymbol{E})$ は

$$\mathrm{End}(\boldsymbol{E}) = 1 \oplus \sqrt{-1}\,1 \oplus \mathfrak{g}_P \oplus \sqrt{-1}\,\mathfrak{g}_P$$

という分解をもつ．したがって，$\mathrm{End}(\boldsymbol{E})$ の切断 ϕ で平行なものは，$\phi = c1_E$ $(c \in C)$ と書ける．すなわち，Γ_A の元 g は $g = c1_E$ と表される．g の各点での値が $SU(r)$ に入るから，$g \in Z(SU(r))$ となる．

上の議論から，接続 A に対して，$\mathrm{Ker} D_A \neq \{0\}$ ならば，A は可約となることがわかる．

3.6 接続と特性類

主ファイバー束 $P = P(M, G)$ 上に接続が与えられると，その曲率形式を用いて，P の特性類とよばれる，底空間 M 上のコホモロジー群の元が定義される．

定義 3.6.1 $\mathfrak{g}$ を G の Lie 代数とする．多重線形写像

$$f : \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g}\ (k \text{ 個の積}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

が次の条件をみたすとき，f を Lie 群 G の k 次**不変多項式**という．

(i) $f(X_1, \cdots, X_k)$ $(X_i \in \mathfrak{g},\ 1 \leqq i \leqq k)$ は X_i について対称

(ii) $f(Ad(a)X_1, \cdots, Ad(a)X_k) = f(X_1, \cdots, X_k)$，$a \in G$

例えば，$\mathfrak{g}$ の Killing 形式 B (第 1 章　定義 1.10.9) は 2 次の不変多項式である．

問 14.　f を G 上の2次の不変多項式とすると

(3.6.1) $$f([X,Y],Z)+f(Y,[X,Z])=0,\quad X,Y,Z\in\mathfrak{g}$$

であることを示せ.

定理 3.6.2 (**Chern–Weil の定理**)　$P=P(M,G)$ を G-主ファイバー束, f を G の k 次不変多項式とする.

(i)　A を P 上の任意の接続, $\{E_a\}$ を $\mathfrak{g}$ の基底として

$$F(A)=\sum_a E_aF_a$$

とおき

$$f(F(A)\wedge\cdots\wedge F(A))=\sum_{a_1\cdots a_k=1}^{l} f(E_{a_1},\cdots,E_{a_k})F_{a_1}\wedge\cdots\wedge F_{a_k}$$

と定義すれば, $f(F(A)\wedge\cdots\wedge F(A))$ は底空間 M 上の閉 $2k$-形式である.

(ii)　任意の $A,A'\in\mathcal{A}_P$ に対して, M 上の $(2k-1)$-形式 θ が存在して

(3.6.2) $$f(F(A')\wedge\cdots\wedge F(A'))-f(F(A)\wedge\cdots\wedge F(A))=d\theta$$

となる. したがって, $f(F(A)\wedge\cdots\wedge F(A))$ が定める M 上の de Rham コホモロジー群の元 $[f(F(A)\wedge\cdots\wedge F(A))]$ は, 接続 A の選び方には関係せず, 主ファイバー束 P のみに依存して定まる.

もちろん $[f(F(A)\wedge\cdots\wedge F(A))]\in H^{2k}(M)$ である. これを G の不変多項式 f に関する P の**特性類**という.

〔**証明**〕　(i)　$A=\{A_U,A_V,\cdots\}$ を P 上の接続, $F(A)=\{F_U,F_V,\cdots\}$ をその曲率とする. 局所自明近傍 U,V に対して $U\cap V\neq\phi$ のときは, $U\cap V$ 上で $F_V=Ad(f_{UV}{}^{-1})F_U$ である ((3.2.6)).

f を G の不変多項式とする.

一般の k 次多項式についても同様なので, $k=2$ の場合で示すことにする. f は随伴表現不変なので $f(F_V\wedge F_V)=f(F_U\wedge F_U)$ となり, $f(F(A)\wedge F(A))$ は局所近傍で $F(A)$ の表示に関係なく M 上の4-形式を与えている.

$f(F(A)\wedge F(A))$ が閉形式であることは, Bianchi の恒等式が成り立つこと, すなわち $d_AF(A)=0$((3.3.12)) に帰着する.

実際, f は線形写像なので

$$d(f(F(A)\wedge F(A)))=f(dF_U\wedge F_U)+f(F_U\wedge dF_U)$$

また

$$d_A F_U = dF_U + [A_U \wedge F_U] = 0$$

であるから

$$dF_U = -[A_U \wedge F_U] = -\sum_{a,b} [E_a, E_b] A_a \wedge F_b$$

したがって

(3.6.3) $d(f(F(A) \wedge F(A)))$

$$= -\sum_{a,a_1,a_2} \{f([E_a, E_{a_1}], E_{a_2}) + f(E_{a_1}, [E_a, E_{a_2}])\} A_a \wedge F_{a_1} \wedge F_{a_2}$$

ゆえに，(3.6.1) により

$$d(f(F(A) \wedge F(A))) = 0$$

(ii) 接続 A_t を

$$A_t = A + t\alpha,\ \ 0 \leqq t \leqq 1,\ \ \alpha = A' - A \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$$

とすると

$$\frac{d}{dt} F(A_t) = d_{A_t}\alpha$$

である．実際，(3.3.15) により

$$F(A_t) = F(A + t\alpha) = F(A) + t d_A \alpha + \frac{t^2}{2}[\alpha \wedge \alpha]$$

であるから

$$\frac{d}{dt} F(A_t) = d_A \alpha + t[\alpha \wedge \alpha] = d_{(A+t\alpha)}\alpha$$

となる．さて

(3.6.4) $$\theta = 2\int_0^1 f(\alpha \wedge F_t)\,dt,\ \ F_t = F(A_t)$$

とおくと，α, F_t はともに $\mathfrak{g}_P$ に値をもつので，$f(\alpha \wedge F_t)$ は t に依存する M 上の 3-形式となる．したがって，θ も M 上の 3-形式である．そこで

$$d\theta = f(F(A') \wedge F(A')) - f(F(A) \wedge F(A))$$

を証明しよう．α は 1-形式であるから

$$df(\alpha \wedge F_t) = f(d\alpha \wedge F_t) - f(\alpha \wedge dF_t)$$

ところが

$$d\alpha = d_{A_t}\alpha - [A_t \wedge \alpha],\ \ dF_t = -[A_t \wedge F_t]$$

であるから

(3.6.5)　$df(\alpha\wedge F_t)=f(d_{A_t}\alpha\wedge F_t)-f([A_t\wedge\alpha]\wedge F_t)+f(\alpha\wedge[A_t\wedge F_t])$

右辺の第2項以下は（i）と同様な議論によって，f の不変性から零となるので

(3.6.6)　$$2d(f(\alpha\wedge F_t))=2f\left(\frac{d}{dt}F_t\wedge F_t\right)=\frac{d}{dt}f(F_t\wedge F_t)$$

したがって

$$\begin{aligned} d\theta&=2\int_0^1 d(f(\alpha\wedge F_t))dt=\int_0^1\frac{d}{dt}f(F_t\wedge F_t)dt\\ &=f(F(A')\wedge F(A'))-f(F(A)\wedge F(A)) \end{aligned}$$

注 7.　この定理は，Ehresmann 接続を用いても証明できる（[17] 第12章§1）.

次に，C^∞ 多様体 M 上のベクトル束 $\boldsymbol{E}$ に対して Chern 類，Pontrjagin 類（M のコホモロジー群の元）を定義しよう.

$\boldsymbol{E}$ を M 上の複素ベクトル束，すなわち，ファイバーが $\boldsymbol{C}^r$ のベクトル束とする. $\boldsymbol{E}$ は M 上の $GL(r;\boldsymbol{C})$-主ファイバー束 P に同伴したベクトル束で，ρ を $GL(r;\boldsymbol{C})$ の $\boldsymbol{C}^r$ 上への自然な表現とすれば

$$\boldsymbol{E}=P\times_\rho \boldsymbol{C}^r$$

である.

$GL(r;\boldsymbol{C})$ の不変多項式 $f_0,f_1,\cdots,f_r$ を次の式で定義する.

(3.6.7)　$$\det\left(tI_r-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}X\right)=f_0(X)t^r+f_1(X)t^{r-1}+\cdots+f_r(X)$$

$$X=(X_i{}^j)\in\mathfrak{gl}(r;\boldsymbol{C})$$

たとえば

$$f_0(X)=1,\ \ f_1(X)=-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\mathrm{Tr}X,\ \ f_r(X)=\frac{(-1)^r}{(2\pi\sqrt{-1})^r}\det X$$

である.

問 15.　次の式を証明せよ.

(3.6.8)　$$\begin{aligned} f_2(X)&=\frac{-1}{4\pi^2}\sum_{i<j}(X_i{}^iX_j{}^j-X_i{}^jX_j{}^i)\\ &=\frac{-1}{8\pi^2}\sum_{i,j}(X_i{}^iX_j{}^j-X_i{}^jX_j{}^i) \end{aligned}$$

問 16. $X\in\mathfrak{u}(r)$ (すなわち $X+{}^t\bar{X}=0$) に対して

$$\overline{\det\left(tI_r-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}X\right)}=\det\left(tI_r-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}X\right)$$

が成り立つことを利用して，f_k $(0\leqq k\leqq r)$ を $\mathfrak{u}(r)$ 上に制限すれば，f_k は実数値をとることを証明せよ．

A を $GL(r;\boldsymbol{C})$-主ファイバー束 P 上の接続，$F(A)$ をその曲率として

$$\det\left(I_r-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}F(A)\right)=1+\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_r \tag{3.6.9}$$

とおく．すなわち

$$\gamma_k=f_k(F(A))$$

である．定理3.6.2から，γ_k は M 上の閉 $2k$-形式を与え，コホモロジー類 $[\gamma_k]\in H^{2k}(M)$ は接続 A のとり方に依存しない．$[\gamma_k]$ を複素ベクトル束 $\boldsymbol{E}$ の **k 次の Chern 類**といい，$c_k(\boldsymbol{E})$ で表す．そして

$$c(\boldsymbol{E})=1+c_1(\boldsymbol{E})+c_2(\boldsymbol{E})+\cdots+c_r(\boldsymbol{E})$$

を $\boldsymbol{E}$ の**全 Chern 類**という．

問 17. $SU(r)$-複素ベクトル束 $\boldsymbol{E}$ に対して $c_1(\boldsymbol{E})=0$ であることを示せ．

次に，実ベクトル束の Pontrjagin 類についてのべよう．$\boldsymbol{E}$ を M 上の実ベクトル束，$\boldsymbol{E}$ のファイバーを $\boldsymbol{R}^q$ とする．$\boldsymbol{E}$ の複素化 $\boldsymbol{E}^C$ とは，$\boldsymbol{E}$ の各ファイバーを複素化してえられる，M 上の複素ベクトル束である．P を $GL(q;\boldsymbol{R})$を構造群とする主ファイバー束とし，$\boldsymbol{E}=P\times_\rho\boldsymbol{R}^q$ とするとき，自然な埋め込み $GL(q;\boldsymbol{R})\to GL(q;\boldsymbol{C})$ を用い，$\boldsymbol{E}^C=P\times_\rho\boldsymbol{C}^q$ として，$\boldsymbol{E}^C$ を定義する．

$\boldsymbol{E}$ の k 次の Pontrjagin 類 $p_k(\boldsymbol{E})$ は

$$p_k(\boldsymbol{E})=(-1)^k c_{2k}(\boldsymbol{E}^C)\in H^{4k}(M)$$

で定義する．

$GL(q;\boldsymbol{R})$-不変多項式 $g_0,g_1,\cdots,g_q$ は

$$\det\left(tI_q-\frac{1}{2\pi}X\right)=g_0(X)t^q+g_1(X)t^{q-1}+\cdots+g_q(X) \tag{3.6.10}$$

$$X=(X_i{}^j)\in\mathfrak{gl}(q;\boldsymbol{R})$$

で定義する．P 上の接続を A，その曲率を $F(A)$ とすれば

$$\beta_{2k}=g_{2k}(F(A))$$

は M 上の閉 $4k$- 形式となる．コホモロジー類 $[\beta_{2k}]$ が $\boldsymbol{E}$ の k 次 Pontrjagin 類を与えることは容易に示される．

次の問と群の簡約化によれば，k が奇数のときは

$$[\beta_k]=0$$

である．

問 18. $X\in\mathfrak{so}(q)$ に対して

$$\det\left(tI_q-\frac{1}{2\pi}X\right)=\det\left(tI_q+\frac{1}{2\pi}X\right),$$

が成り立つことを用いて，k が奇数のとき

$$g_k(X)=0,\quad X\in\mathfrak{so}(q)$$

を示せ．

ベクトル束の Chern 類，Pontrjagin 類は，ともに整数係数コホモロジー群 $H^l(M;\boldsymbol{Z})$ の元である（[19] 第1章§4）．C^∞ 多様体 M に対して，接ベクトル束 TM の，k 次 Pontrjagin 類 $p_k(TM)$ を単に k 次 Pontrjagin 類 $p_k(M)$ という．

例 8. M を向きづけられたコンパクトな4次元 C^∞ 多様体とする．積分 $\int_M p_1(M)$ は，$p_1(M)\in H^4(M)$ を代表する 4-形式の M 上の積分，$\tau(M)$ は M の Hirzebruch の符号数とするとき

$$\tau(M)=\frac{1}{3}\int_M p_1(M)$$

である（第1章 1.3節，例．[19] 第2章 §8）．

最後に，ベクトル束の Whitney 和，双対束，テンソル積に対する Chern 類の公式についてのべよう．

Whitney 和 $\boldsymbol{E}\oplus\boldsymbol{F}$ の全 Chern 類は

$$c(\boldsymbol{E}\oplus\boldsymbol{F})=c(\boldsymbol{E})\wedge c(\boldsymbol{F}) \tag{3.6.11}$$

で与えられ，双対束 $\boldsymbol{E}^*$ の Chern 類は

(3. 6. 12) $$c_k(E^*) = (-1)^k c_k(E)$$

と表される．これは定理 3. 6. 2 から導かれる（3. 3 節の例も参照）．

テンソル積の Chern 類の公式を述べるには，**Chern 指標** $ch(E)$ の定義をしておかなくてはならない．これは次のように定義される：

(3. 6. 13)
$$ch(E) = \mathrm{Tr}\ \exp\left\{-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}F(A)\right\}$$
$$= r - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\mathrm{Tr}F(A) + \frac{1}{2\cdot 4\pi^2(\sqrt{-1})^2}\mathrm{Tr}F(A)\wedge F(A)$$
$$+ \cdots + \frac{(-1)^n}{n!\,(2\pi\sqrt{-1})^n}\mathrm{Tr}F(A)\wedge\cdots\wedge F(A)$$

これに対して，次の公式が成り立つ．

$$ch(E\otimes F) = ch(E)\wedge ch(F)$$
$$ch(E\oplus F) = ch(E) + ch(F)$$

（[17] 第 12 章 § 3，[19] 第 3 章 § 10）．

問 19. E を階数 r のベクトル束とする．

(i) $ch(E) = r + c_1(E) + \frac{1}{2}\{c_1(E)^2 - 2c_2(E)\} + \cdots$

であることを示せ．

(ii) $\mathrm{End}(E) \approx E\otimes E^*$（束同型）を用いて

$c_1(\mathrm{End}(E)) = 0$

$c_2(\mathrm{End}(E)) = -\{(r-1)c_1{}^2(E) - 2rc_2(E)\}$

であることを証明せよ．

第4章　Yang–Mills 汎関数と Yang–Mills 接続

4.1　Yang–Mills 汎関数

この章では，とくに断りがない限り，M は向きづけられた n 次元 C^∞ 多様体で，Riemann 計量 h をもち，G はコンパクトな Lie 群であるとする．

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現不変な正定値内積を，$X, Y \in \mathfrak{g}$ に対して $\langle X, Y \rangle$ で表す（第1章　1.10 節）．M 上の G–主ファイバー束 $P=P(M,G)$ に同伴した随伴束 $\mathfrak{g}_P = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ には，この内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を用いてファイバー計量が定義される．これも同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で表すことにする．実際，$\mathfrak{g}_P$ の元を，局所自明近傍での局所表示によって $\Phi_U(x)$，$\Phi_V(x)$ と表すと，$f(x)$ を変換関数として，

$$\Phi_V(x) = Ad(f^{-1}(x))\Phi_U(x), \quad \text{よって} \quad \langle \Phi_U(x), \Phi_U(x) \rangle = \langle \Phi_V(x), \Phi_V(x) \rangle$$

であって，局所表示のとり方によらない値が定まるから，これによって $\mathfrak{g}_P$ 上に $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が定義される．

同様に，Riemann 計量 h と $\langle \cdot, \cdot \rangle$ からテンソル積束 $\mathfrak{g}_P \otimes \Lambda^k(M)$ 上にファイバー計量が自然に定義されるが，これも同じ記号 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ で書くことにする．実際，$x \in M$ において $\Phi, \Psi \in (\mathfrak{g}_P \otimes \Lambda^k(M))_x$ を $\Phi = \sum E_a \Phi_a$，$\Psi = \sum E_b \Psi_b$ と局所表示して

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{a,b} \langle E_a, E_b \rangle (\Phi_a, \Psi_b) \tag{4.1.1}$$

と定義すればよい．ここに，$\{E_a\}_{1 \leq a \leq l}$ $(l = \dim \mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の基底，Φ_a, Ψ_b 等は x での k 次交代形式である．

M の体積要素 $dv = \sqrt{|h|}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ を用いて $\mathfrak{g}_P$ 値 k–形式の空間 $\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ 上に，正値内積

$$\langle\!\langle \Phi, \Psi \rangle\!\rangle = \int_M \langle \Phi, \Psi \rangle dv, \quad \Phi, \Psi \in \Omega^k(\mathfrak{g}_P) \tag{4.1.2}$$

を定義し，$\|\Phi\|^2 = \langle\!\langle \Phi, \Phi \rangle\!\rangle$ とする．底空間 M がコンパクトでないときには，この内積は必ずしも有限確定の値をとるとは限らない．

定義 4.1.1　主ファイバー束 P 上の接続全体のつくるアファイン空間 $\mathcal{A}_P$

上の汎関数

$$\mathcal{YM}: \mathcal{A}_P \longrightarrow \boldsymbol{R};$$
$$A \longrightarrow \frac{1}{2}\int_M |F(A)|^2\, dv = \frac{1}{2}\|F(A)\|^2$$

を **Yang–Mills 汎関数**という．この汎関数を**作用積分**ともいう．

定義 4.1.2 P 上の接続 A が，汎関数 $\mathcal{YM}$ の停留点（臨界点）であるとき，すなわち $\mathcal{A}_P$ 内の任意の曲線

$$A_t\,(|t|<\varepsilon),\quad A_0=A$$

に対して

$$\frac{d}{dt}\mathcal{YM}(A_t)\Big|_{t=0}=0$$

となるとき，A は **Yang–Mills 接続**であるという．

Yang–Mills 接続を求めることは，Yang–Mills 汎関数の変分問題を解くことにほかならない．それは $\mathcal{YM}$ の第一変分の Euler–Lagrange の方程式を導き，それをみたす接続をみいだすということである．

Yang–Mills 汎関数の Euler–Lagrange 方程式を求めるために，まず次の定理を証明しておく．

定理 4.1.3 $A_0=A$ である $\mathcal{A}_P$ 内の C^∞ 曲線 A_t に対して

$$\alpha=\frac{d}{dt}A_t\Big|_{t=0}\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$$

の台がコンパクトならば

$$\frac{d}{dt}\mathcal{YM}(A_t)\Big|_{t=0}=\int_M\langle\delta_A F(A),\alpha\rangle dv \tag{4.1.3}$$

である．ここに，δ_A は共変外微分 d_A の形式的随伴作用素で

$$\delta_A: \Omega^2(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$$
$$\delta_A F(A)=\sum_i(\delta_A F(A))_i\, dx^i \tag{4.1.4}$$
$$(\delta_A F(A))_i=-\sum_{j,k}h^{jk}\tilde{D}_j F_{ki}$$

である．

〔**証明**〕 曲線 A_t とは，各局所自明近傍 U 上で，A_t を表す接続形式 $A_U(t)$ が t について C^∞ であるものである．$a_t=A_t-A$ とおくと

$$F(A_t)=F(A+a_t)=F(A)+d_Aa_t+\frac{1}{2}[a_t\wedge a_t]$$

である．$F(A_t)$ を t について微分し，$t=0$ とおくと

$$\frac{d}{dt}F(A_t)\Big|_{t=0}=d_A\Big(\frac{d}{dt}a_t\Big)\Big|_{t=0}+\frac{1}{2}\Big(\Big[\frac{d}{dt}a_t\wedge a_t\Big]+\Big[a_t\wedge\frac{d}{dt}a_t\Big]\Big)\Big|_{t=0}$$

となるが，　$a_0=0$，$\frac{d}{dt}a_t\Big|_{t=0}=\alpha$ であるから

$$\frac{d}{dt}F(A_t)\Big|_{t=0}=d_A\alpha$$

となる．汎関数 $\mathcal{YM}$ の t についての微分

$$\frac{d}{dt}\mathcal{YM}(A_t)\Big|_{t=0}=\int_M\langle F(A),\frac{d}{dt}F(A_t)\Big|_{t=0}\rangle dv$$

にこれを代入し，d_A の形式的随伴作用素 δ_A を用いれば

$$\frac{d}{dt}\mathcal{YM}(A_t)\Big|_{t=0}=\int_M\langle F(A),d_A\alpha\rangle dv=\int_M\langle\delta_AF(A),\alpha\rangle dv \tag{4.1.5}$$

と書き表される．

次に，$\delta_AF(A)$ を求める．

M 上の，台がコンパクトなベクトル場 X を，各局所自明近傍で

$$X^i=\sum_{j,s,t}h^{ij}h^{st}\langle F_{jt},\alpha_s\rangle\,;\,X=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{4.1.6}$$

によって定義する．ここに，F_{jk} は $F(A)$ の成分，α_i は α の成分である．ベクトル場 X に対して

$$\int_M(\mathrm{div}X)dv=0 \tag{4.1.7}$$

（第1章　定理 1.3.5），また，第1章　1.8 節の議論により

$$\mathrm{div}\,X=\sum_{i=1}^n\nabla_iX^i=\sum h^{ij}h^{st}\nabla_i\langle F_{jt},\alpha_s\rangle \tag{4.1.8}$$

Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{E_a\}_{1\le a\le l}$ を用いて

$$F_{jt}=\sum_a E_aF^a_{jt},\quad \alpha_s=\sum_b E_b\alpha^b_s$$

と表すと，(4.1.8) の右辺は次のように書ける．

$$\begin{aligned}&\sum h^{ij}h^{st}\nabla_i(F^a_{jt}\alpha^b_s)\langle E_a,E_b\rangle\\&=\sum h^{ij}h^{st}\{\nabla_iF^a_{jt}\cdot\alpha^b_s+F^a_{jt}\cdot\nabla_i\alpha^b_s\}\langle E_a,E_b\rangle\\&=\sum h^{ij}h^{st}\{\langle\nabla_iF_{jt},\alpha_s\rangle+\langle F_{jt},\nabla_i\alpha_s\rangle\}\end{aligned}$$

さらに，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ が随伴不変なので，$A=\sum A_i dx^i$ $(A_i\in\mathfrak{g})$ に対して

$$\langle[A_i, F_{jt}], \alpha_s\rangle+\langle F_{jt}, [A_i, \alpha_s]\rangle=0 \tag{4.1.9}$$

これを上式の右辺に加えると，共変微分 $\tilde{D}_i$ の定義 (3.3.17) により

$$\operatorname{div}X=\sum h^{ij}h^{st}\{\langle\tilde{D}_iF_{jt}, \alpha_s\rangle+\langle F_{jt}, \tilde{D}_i\alpha_s\rangle\} \tag{4.1.10}$$

したがって

$$\int_M\sum h^{ij}h^{st}\langle F_{jt}, \tilde{D}_i\alpha_s\rangle dv=-\int_M\sum h^{ij}h^{st}\langle\tilde{D}_iF_{jt}, \alpha_s\rangle dv$$
$$=\int_M\sum h^{st}\langle -h^{ij}\tilde{D}_iF_{jt}, \alpha_s\rangle dv$$

である．他方

$$\langle F(A), d_A\alpha\rangle=\frac{1}{2}\sum h^{ij}h^{st}\langle F_{is}, \tilde{D}_j\alpha_t-\tilde{D}_t\alpha_j\rangle$$
$$=\sum h^{ij}h^{st}\langle F_{is}, \tilde{D}_j\alpha_t\rangle$$

であるから

$$\int_M\langle F(A), d_A\alpha\rangle dv=\int_M\sum h^{st}\langle-\sum h^{ij}\tilde{D}_iF_{jt}, \alpha_s\rangle dv \tag{4.1.11}$$

となる．

系 4.1.4 A が Yang-Mills 接続であることと，A が

$$\delta_A F(A)=0 \tag{4.1.12}$$

をみたすこととは同値である．

方程式 (4.1.12) を **Yang-Mills 方程式**という．

注 1. (4.1.12) は接続 A に関する 2 階非線形偏微分方程式である．

$U(1)$-主ファイバー束 P 上の接続 A の $\mathfrak{g}_P$ 上の共変外微分 d_A は

$$d_A\cdot=d\cdot+[A\wedge\cdot]=d\cdot$$

となるから，A が Yang-Mills 接続であるための条件は，純虚数に値をもつ M 上の 2-形式 $F(A)$ が $\delta F(A)=0$ をみたすことである．Bianchi の恒等式は $dF(A)=0$ であるから，$F(A)$ が Riemann 多様体 (M,h) 上で調和的であることが，A が Yang-Mills 接続であるための必要十分条件である．

一般の G-主ファイバー束 P 上の Yang-Mills 接続 A は，次の 2 つの式をみたす．

(4.1.13)　　$\delta_A F(A)=0$　　(Yang-Mills 方程式)

$d_A F(A)=0$　(Bianchi の恒等式)

M がコンパクトの場合には，楕円型作用素

$$\Delta_A=\delta_A d_A+d_A \delta_A : \Omega^2(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^2(\mathfrak{g}_P)$$

に関して

$$\Delta_A F(A)=0$$

をみたすことが (4.1.13) と同値となる．このことから非可換群の Yang-Mills 接続の曲率は“非線形的調和 2-形式”といえる．

作用素 δ_A を d_A の**余微分作用素**というが，これは外微分 d の余微分作用素 δ (第1章　1.8節) と同様に，d_A と Hodge 作用素 $*$ を用いて表現できる．

作用素

$$* : \Lambda^k(M) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(M)$$

は，自然に作用素

(4.1.14)　　$* : \mathfrak{g}_P \otimes \Lambda^k(M) \longrightarrow \mathfrak{g}_P \otimes \Lambda^{n-k}(M)$

に拡張される．これによって

$$\Phi, \Psi \in \Omega^k(\mathfrak{g}_P)=\Gamma(M; \mathfrak{g}_P \otimes \Lambda^k(M))$$

の内積 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ は，次のように書ける．

(4.1.15)　　$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int_M \langle \Phi \wedge * \Psi \rangle$

ここに

$$\langle \cdot \wedge \cdot \rangle : \Omega^k(\mathfrak{g}_P) \times \Omega^l(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^{k+l}(M)$$

は

$$\Omega^k(\mathfrak{g}_P) \ni \Phi = \sum E_a \Phi_a, \quad \Omega^l(\mathfrak{g}_P) \ni \Theta = \sum E_b \Theta_b$$

に対して

(4.1.16)　　$\langle \Phi \wedge \Theta \rangle = \sum_{a,b} \langle E_a, E_b \rangle \Phi_a \wedge \Theta_b$

で定義される双線形写像である．

$\Phi \in \Omega^{k-1}(\mathfrak{g}_P)$，$\Psi \in \Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ に対して

$$\begin{aligned} d\langle \Phi \wedge * \Psi \rangle &= \langle d_A \Phi \wedge * \Psi \rangle + (-1)^{k-1} \langle \Phi \wedge d_A * \Psi \rangle \\ &= \langle d_A \Phi \wedge * \Psi \rangle + (-1)^l \langle \Phi \wedge * (* d_A * \Psi) \rangle \\ &\qquad (l=nk+n) \end{aligned}$$

である．台がコンパクトな Φ について，この式の両辺を積分すると，Stokes

の定理（第1章　定理1.3.3）により

(4.1.17) $$\langle d_A \Phi, \Psi\rangle = (-1)^{l-1}\langle \Phi, *d_A*\Psi\rangle$$

すなわち

(4.1.18) $$\delta_A\Psi = (-1)^{l+1} * d_A * \Psi,\ \ \Psi\in\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$$
$$(l+1 = nk+n+1)$$

となる．

系 4.1.5　次の (i) と (ii) は同値である．

(i)　A は Yang-Mills 接続である．

(ii)　A は $d_A(*F(A))=0$ をみたす．

主ファイバー束 P のゲージ変換群 $\mathcal{G}_P$ は接続の集合 $\mathcal{A}_P$ に作用し（第3章3.4節），$A\in\mathcal{A}_P$ に対してゲージ変換 g を作用させて得られる接続 $g^*(A)$ の曲率形式は

$$F(g^*(A)) = g^*(F(A)) = Ad(g^{-1})F(A)$$

である（命題3.4.1）が，$\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ 上の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は随伴表現不変であるから，任意の点 $x\in M$ で

(4.1.19) $$\langle F(g^*(A)), F(g^*(A))\rangle = \langle F(A), F(A)\rangle$$

が成り立つ．

命題 4.1.6　(i)　Yang-Mills 汎関数は $\mathcal{G}_P$ 不変である．すなわち

(4.1.20) $$\mathcal{YM}(g^*(A)) = \mathcal{YM}(A),\qquad A\in\mathcal{A}_P, g\in\mathcal{G}_P$$

(ii)　A が Yang-Mills 接続ならば，$g\in\mathcal{G}_P$ に対して，$g^*(A)$ も Yang-Mills 接続である．

〔証明〕　(i)　はあきらかである．

(ii)　$g^*(A)$ を通る $\mathcal{A}_P$ の曲線を A_t' とすると，$A_t=(g^{-1})^*(A_t')$ は A を通る $\mathcal{A}_P$ の曲線である．このとき (i) により

$$\mathcal{YM}(A_t') = \mathcal{YM}(g^*(A_t)) = \mathcal{YM}(A_t)$$

であるから

$$\frac{d}{dt}\mathcal{YM}(A_t')\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\mathcal{YM}(A_t)\Big|_{t=0}$$

となる．よって，A が Yang–Mills 接続ならば $A'=g^*(A)$ も Yang–Mills 接続である．

問 1. $\delta_{g^*(A)}F(g^*(A))=g^*(\delta_A F(A))$ を示せ．

$A, A'\in\mathcal{A}_P$ に対して，ゲージ変換 g が存在して，$A'=g^*(A)$ と書けるとき，A と A' は同値であるといい，この関係を $A\sim A'$ で表す．A を含む同値類

$$[A]=\{A'\in\mathcal{A}_P\,;\,A'\sim A\}$$

は，定義により

$$[A]=\{g^*(A)\,;\,g\in\mathcal{G}_P\}$$

で，A を通る $\mathcal{G}_P$ の軌道である．この同値類の集合

$$\mathcal{B}_P=\{[A]\,;\,A\in\mathcal{A}_P\}$$

は

$$\mathcal{B}_P=\mathcal{A}_P/\mathcal{G}_P$$

とも表される．**$\mathcal{B}_P$ を接続の空間**という．

$\mathcal{B}_P$ は，ゲージ変換で移り合う接続を同一視した空間で，Yang–Mills 汎関数は $\mathcal{B}_P$ 上の関数であると考えることができる．命題 4.1.6 によれば，Yang–Mills 接続が一つ存在すると，それにゲージ変換を作用させることによって無数の Yang–Mills 接続がつくり出される．ゲージ変換は，ある意味で主ファイバー束 P のファイバーの座標の変換であるから，これらの Yang–Mills 接続は本質的には座標変換のちがいしかない．

$\mathcal{B}_P$ の部分集合

$$\{\text{Yang–Mills 接続の全体}\}/\mathcal{G}_P$$

は Yang–Mills 接続の**モジュライ空間**とよばれ，Yang–Mills 方程式の“解の空間”を表している．

例 1. A を $P=P(M,G)$ 上の Yang–Mills 接続とする．P' は P に束同型な主ファイバー束とするとき，束同型写像 $f:P'\longrightarrow P$ による A のひきもどし $f^*(A)$ は，P' 上の Yang–Mills 接続となる．

底空間 M が擬 Riemann 多様体の場合にも，その上の接続 A が (4.1.12) をみたすとき，A を Yang-Mills 接続という．

ここで，M が Minkowski 空間の場合を見ておこう．

Minkowski 計量 h をもつ Minkowski 空間 $(\boldsymbol{R}^4, h)$ 上の $U(1)$-主ファイバー束 $P=\boldsymbol{R}^4\times U(1)$ における Yang-Mills 接続は，電荷・電流なしの Maxwell 電磁方程式を与えることがわかる．ここに

$$h=\sum_{i,j=0}^{3} h_{ij}dx^i dx^j=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2$$

である．P 上の Yang-Mills 接続とその曲率を

$$A=\sum_{i=0}^{3} A_i dx^i,\quad F(A)=\frac{1}{2}\sum_{i,j=0}^{3} F_{ij}dx^i\wedge dx^j$$

とすると

(4.1.21) $$d_A F(A)=dF(A)=0$$

(4.1.22) $$\delta_A F(A)=\delta F(A)=0$$

である．(4.1.21) は成分で書くと次のようになる．

(4.1.23) $$\frac{\partial}{\partial x^i}F_{jk}+\frac{\partial}{\partial x^j}F_{ki}+\frac{\partial}{\partial x^k}F_{ij}=0 \qquad 0\leqq i,j,k\leqq 3$$

また，(4.1.22) は次のように書ける．

(4.1.24) $$\frac{\partial F_{0i}}{\partial x^0}-\frac{\partial}{\partial x^1}F_{1i}-\frac{\partial}{\partial x^2}F_{2i}-\frac{\partial}{\partial x^3}F_{3i}=0 \qquad 0\leqq i\leqq 3$$

F の成分は $F_{ij}+F_{ji}=0$ $(0\leqq i,j\leqq 3)$ であるから，この成分を用い

$$E_i=-F_{0i} \qquad (i=1,2,3)$$

$$B_1=F_{23},\quad B_2=F_{31},\quad B_3=F_{12}$$

とおいて，$\boldsymbol{R}^4$ 上で $\boldsymbol{R}^3$ に値をもつ関数

$$\boldsymbol{E}=(E_1,E_2,E_3),\quad \boldsymbol{B}=(B_1,B_2,B_3)$$

を定義する．また，変数を $t=x^0$, $x=x^1$, $y=x^2$, $z=x^3$ とし，ベクトル解析の記法に従い，微分演算子

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

を用いると，可積分条件 (4.1.23) からは

(4.1.25)
$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 \quad \text{(磁荷が単独で存在しない条件)}$$
$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \quad \text{(Faraday の法則)}$$

がえられる．また，(4.1.24) からは

$$(4.1.26)\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{E}=0 \qquad (\text{Gauss の法則})$$
$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \qquad (\text{Ampére の法則})$$

が導かれる．これら4つの方程式の系は，電荷・電流が存在しない空間での電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{B}$ がみたす方程式にほかならない（第1章　1.5節）．

接続 $A=\sum A_i dx^i$ を2つの部分に分けて考え，$\phi=A_0$ を**スカラーポテンシャル**，$\boldsymbol{A}=(A_1, A_2, A_3)$ を**ベクトルポテンシャル**とよぶ．

$F(A)=dA$ から，ベクトル解析によって (4.1.25) は

$$(4.1.27)\qquad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$$
$$\boldsymbol{E}=\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

と書き表される．これを (4.1.26) に代入すると

$$(4.1.28)\qquad -\nabla^2\phi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$$
$$-\nabla^2\boldsymbol{A}+\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi+\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=0$$

となる．ここでは，等式

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

を用いている．

ところで，$F(A)=dA$ であるから，A のとり方には任意のスカラー関数 $\chi(x)$ だけの任意性がある．すなわち，A の代わりに，$A+d\chi$ をとっても曲率は変化しない．実際，ゲージ変換 $\exp\chi(x)$ によって A は

$$A+\exp(-\chi)\exp(\chi)d\chi=A+d\chi$$

となる．A の選び方に任意性があるので，束縛条件

$$(4.1.29)\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{A}-\frac{\partial\phi}{\partial t}=\operatorname{div}A=0$$

を A に課すならば，(4.1.28) は

$$(4.1.30)\qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\nabla^2\phi=0$$
$$\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\boldsymbol{A}=0$$

となり，ϕ, A_1, A_2, A_3 はすべて同一の波動方程式をみたすことになる．このことから，電場・磁場が真空中を波として伝播することが理解される．

注 1. (4.1.28) から (4.1.30) への議論では，A に対して $\mathrm{div} A=0$ という条件を課した．Euclid 計量をもつ $\boldsymbol{R}^n$ 上においても，接続 A に対して適当な局所ゲージ変換 g を選んで

$$\delta(g^*(A))=\delta(g^{-1}dg+g^{-1}Ag)=0$$

をみたすようにすることを，ゲージを固定して，接続 A を **Coulomb ゲージ的**に定めるという．

また，

$$r=\left(\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad \frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{n}x^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

として，原点で $g^*(A)=0$ であり，かつ

$$g^*(A)\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)=\sum_j\frac{x^j}{r}(g^*(A))_j(x)=0 \tag{4.1.31}$$

をみたす $g^*(A)$ を，**指数ゲージ的**であるという．

問 2. $\boldsymbol{R}^n$ 上の主ファイバー束 P での接続 A が

$$A(0)=0,\quad \sum_j x^jA_j(x)=0$$

をみたすとき，次の式が成り立つことを証明せよ ([65]，p. 14 補題 2.1).

(i) $\dfrac{\partial}{\partial r}(rA_j)=\sum_k x^kF_{kj}(x)$

(ii) $A_j(x)=\displaystyle\int_0^1 t\sum_k x^kF_{kj}(tx)\,dt$

(iii) $|A(x)|\leqq\dfrac{1}{2}|x|\max_{|y|\leq|x|}|F(y)|$

例 2. $U(1)$-主ファイバー束 $P=P(M, U(1))$ 上の接続 A が，Yang-Mills 接続であるための必要十分条件は，実 2-形式 $\sqrt{-1}\,F(A)$ が調和的となることであった．したがって，もし $H^2=0$ (すなわち $b_2(M)=0$) ならば，どのような $U(1)$-主ファイバー束をとっても，そこでの Yang-Mills 接続は平坦となる．また，$\sqrt{-1}a\in\Omega^1(M)$ に対して，$A+a$ が Yang-Mills 接続であることは，$da=0$ と同値である．したがって，Yang-Mills 接続の曲率はすべて一致し $F(A)=dA$ で与えられる．

命題 4.1.7　$U(1)$-主ファイバー束 P 上の Yang-Mills 接続のモジュライ空間は，商空間 $H^1(M)/H^1(M;\boldsymbol{Z})$ と1対1に対応する．ここに，$H^1(M)$ は1次の de Rham コホモロジー群，$H^1(M;\boldsymbol{Z})$ は M の整数係数の1次コホモロジー群である．

〔証明〕　$\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{R}$ であるから，$H^1(M;\boldsymbol{Z})$ は $H^1(M;\boldsymbol{R})$ の中に自然に埋め込める．また，de Rham の同型定理により，$H^1(M;\boldsymbol{R})$ は $H^1(M)$ と同一視できる．さて，上の議論から

$$\{\text{Yang-Mills 接続の全体}\} \text{ と } Z^1(M)=\{a\in\Omega^1(M);da=0\}$$

とは同一視され，また，P のゲージ変換 f は M から $U(1)$ への C^∞ 写像であって，$f^*(A)=A+f^{-1}df$ であるから

$$W=\{f^{-1}df;f:M\xrightarrow{C^\infty}U(1)\}$$

とすれば，モジュライ空間は $Z^1(M)/W$ と同一視される．

一方，$B^1(M)=\{du;u\in C^\infty(M)\}\subset W$ であるから，自然に，上への写像

$$\varphi: H^1(M)=Z^1(M)/B^1(M)\longrightarrow Z^1(M)/W$$

が定義される．φ は定義域も値域も加群の構造をもち，準同型写像である．

層の完全系列に従属したチェック・コホモロジー群の完全系列理論を用いることによって $\mathrm{Ker}\varphi=H^1(M;\boldsymbol{Z})$ が導かれ，Yang-Mills 接続のモジュライ空間が $H^1(M)/H^1(M;\boldsymbol{Z})$ と1対1に対応することが示される．

4.2　自己双対接続——インスタントン

本節では，底空間 M はつねに4次元であるとして話を進める．

(M,h) を向きづけられたコンパクトな4次元 Riemann 多様体とする．各点 $x\in M$ での2次交代形式の空間 $\Lambda_x^2(M)$ は6次元の実ベクトル空間である．M が4次元であるから，Hodge 作用素 $*:\Lambda_x^2(M)\longrightarrow\Lambda_x^2(M)$ は包含的，すなわち $*\cdot*=$(恒等変換) である．したがって，$\Lambda_x^2(M)$ は $*$ の固有値 $+1$ および -1 に対応する固有空間 $\Lambda_{+,x}^2$ と $\Lambda_{-,x}^2$ の直和に直交的に分解する．(第1章1.4節例) すなわち

$$\Lambda_x^2(M)=\Lambda_{+,x}^2\oplus\Lambda_-^2$$

$\{\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$ を M の向きに従属する正規直交基底の双対 1-形式の組とすると

$$
(4.2.1)\qquad
\begin{aligned}
*\,\omega^1\wedge\omega^2 &= \omega^3\wedge\omega^4\\
*\,\omega^1\wedge\omega^3 &= \omega^4\wedge\omega^2\\
*\,\omega^1\wedge\omega^4 &= \omega^2\wedge\omega^3
\end{aligned}
$$

となるから，$\Lambda^2_{+,x}$ は

$$\omega^1\wedge\omega^2+\omega^3\wedge\omega^4,\quad \omega^1\wedge\omega^3+\omega^4\wedge\omega^2,\quad \omega^1\wedge\omega^4+\omega^2\wedge\omega^3$$

で張られ，同様に $\Lambda^2_{-,x}$ は

$$\omega^1\wedge\omega^2-\omega^3\wedge\omega^4,\quad \omega^1\wedge\omega^3-\omega^4\wedge\omega^2,\quad \omega^1\wedge\omega^4-\omega^2\wedge\omega^3$$

で張られる．Λ^2_+ の元は**自己双対的**，Λ^2_- の元は**反自己双対的**であるという．もちろん，M の向きを逆にすれば，自己双対的な 2-形式は新しい向きに関して反自己双対的となる．M 上の 2-形式から成るベクトル束 $\Lambda^2(M)$ は，ファイバーがどちらも 3 次元の部分束 Λ^2_+ と Λ^2_- との Whitney 和として表される．すなわち

$$(4.2.2)\qquad \Lambda^2(M)=\Lambda^2_+\oplus\Lambda^2_-$$

である．

問 3. M の体積要素を $\omega=\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3\wedge\omega^4$ とし，また $\Lambda^2_x(M)$ での内積 (β,γ) は

$$(\beta,\gamma)\omega=\beta\wedge*\gamma$$

で定義される（第 1 章　定義 1.4.2）．このとき次のことを証明せよ．

(i) $\Lambda^2_{+,x}$ と $\Lambda^2_{-,x}$ は直交する．

(ii) $\beta\in\Lambda^2_{+,x}$, $\gamma\in\Lambda^2_{-,x}$ に対して $\beta\wedge\gamma=0$

(iii) $\beta\in\Lambda^2_x(M)$ を $\beta=\beta_++\beta_-$ $(\beta_\pm\in\Lambda^2_{\pm,x})$ と分解したとき

$$|\beta|^2=|\beta_+|^2+|\beta_-|^2,\quad \beta\wedge\beta=(|\beta_+|^2-|\beta_-|^2)\omega$$

である．

(4.2.2) に応じて，テンソル積束 $\mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^2(M)$ も次のように分解する．

$$(4.2.3)\qquad \mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^2(M)=\mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^2_+\oplus\mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^2_-$$

したがって，$\Omega^2_\pm(\mathfrak{g}_P)=\Gamma(M;\mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^2_\pm)$ とおくと，これは

$$(4.2.4)\qquad \Omega^2(\mathfrak{g}_P)=\Omega^2_+(\mathfrak{g}_P)\oplus\Omega^2_-(\mathfrak{g}_P)$$

と直交直和的に分解する．

A を主ファイバー束 P 上の接続とすれば，(4.2.4) の分解に応じてその曲率 $F(A)$ も次のように表される．

(4.2.5) $$F(A)=F_+ + F_- \qquad F_\pm \in \Omega^2_\pm(\mathfrak{g}_P)$$

定義 4.2.1 $F_-=0$，いいかえれば $*F(A)=F(A)$ である接続を**自己双対接続**といい，$F_+=0$ である接続を**反自己双対接続**という．

自己双対接続は，完全に平坦ではないが"半平坦"な接続と考えられる．

とくに，$M=S^4$（4次元球面）または $M=\boldsymbol{R}^4$（4次元 Euclid 空間）上の自己双対接続は**インスタントン**，反自己双対接続は**反インスタントン**とよばれる．

定理 4.2.2 自己双対接続は Yang–Mills 接続である．反自己双対接続も Yang–Mills 接続である．

〔**証明**〕 接続 A が自己双対的ならば $F_-=0$，したがって $*F(A)=F(A)$ である．一方，Bianchi の恒等式により $d_A F(A)=0$ であるから

$$\delta_A F(A)=-*d_A(*F(A))=-*d_A(F(A))=0$$

よって，A は Yang–Mills 接続である．

反自己双対接続の場合も同様である．

問 4. Yang–Mills 接続 A の曲率を，$F(A)=F_+ + F_-$ と分解したとき，F_+, F_- はともに方程式

(4.2.6) $$d_A\Phi=0 \quad \delta_A\Phi=0$$

をみたすことを示せ．

注 2. Yang–Mills 方程式 $\delta_A F(A)=0$ は，A について2階の微分方程式であったが，自己双対方程式 $*F(A)=F(A)$ は1階の方程式である．

Lie 群 G の Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現不変な正値内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は G の2次不変多項式であるから，主ファイバー束の特性類（第3章 3.6節）の議論により，主ファイバー束 P 上の任意の接続 A に対して，4次元多様体 M 上のコホモロジー類 $[\langle F(A)\wedge F(A)\rangle]$ $(\in H^4(M))$ は，P にのみ依存したものである．

定理 4.2.3 $p(P)=\int_M\langle F(A)\wedge F(A)\rangle$ とおくとき

(i) $\mathcal{YM}(A)\geqq\frac{1}{2}|p(P)|,\quad A\in\mathcal{A}_P$

である．等号が成り立つのは，A が自己双対的，または反自己双対的のとき，かつそのときに限る．

(ii) P が自己双対接続をもてば $p(P)\geqq 0$ であり，反自己双対接続をもてば $p(P)\leqq 0$ である．

〔**証明**〕 定義により

(4.2.7) $$|F(A)|^2dv=\langle F(A)\wedge *F(A)\rangle$$

である．不等式

(4.2.8) $$\langle F(A)\wedge *F(A)\rangle\geqq\pm\langle F(A)\wedge F(A)\rangle$$

を証明しよう．

問3の (ii) によって

$$\begin{aligned}&\langle F\wedge *F\rangle\\&=\langle F_+\wedge *F_+\rangle+\langle F_-\wedge *F_-\rangle\\&=(|F_+|^2+|F_-|^2)dv\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}&\langle F\wedge F\rangle\\&=\langle F_+\wedge F_+\rangle+\langle F_-\wedge F_-\rangle\\&=\langle F_+\wedge *F_+\rangle-\langle F_-\wedge *F_-\rangle\\&=(|F_+|^2-|F_-|^2)dv\end{aligned}$$

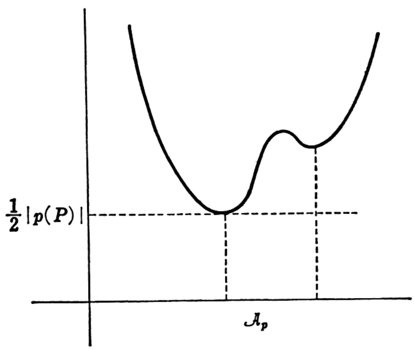


図 4.1 Yang-Mills 汎関数のグラフ

これで (4.2.8) が証明された．

よって

$$\begin{aligned}\mathcal{YM}(A)&=\frac{1}{2}\int_M\langle F(A)\wedge *F(A)\rangle\\&\geqq\pm\frac{1}{2}\int_M\langle F(A)\wedge F(A)\rangle=\pm\frac{1}{2}p(P)\end{aligned}$$

すなわち

$$\mathcal{YM}(A)\geqq\frac{1}{2}|p(P)|,\quad A\in\mathcal{A}_P$$

である．

次に，ここで等号が成立する場合を調べる．

まず $\mathcal{YM}(A)=\frac{1}{2}p(P)$ とすれば

$$0=\int_M\langle F(A)\wedge(*F(A)-F(A))\rangle=2\int_M|F_-|^2dv$$

よって，$F_-=0$ である．

同様に，$\mathcal{YM}(A)=-\frac{1}{2}\int_M\langle F(A)\wedge F(A)\rangle$ と仮定すれば，$F_+=0$ が導かれる．

(ii) A が自己双対的ならば，$F(A)=F_+$ であるから

$$p(P)=\int_M\langle F_+\wedge F_+\rangle=\int_M\langle F_+\wedge *F_+\rangle=\int_M|F_+|^2dv$$
$$=2\mathcal{YM}(A)\geqq 0$$

反自己双対接続の場合も同様に証明される．

この定理により，4次元コンパクト Riemann 多様体上の Yang-Mills 汎関数は，主ファイバー束にのみ依存する不変量によって下からおさえられており，自己双対または反自己双対接続は，汎関数が絶対最小値をとる接続として特徴づけられるということになるのである．

次に，G がコンパクト線形 Lie 群 $U(n)$，または $SU(n)$ の場合に，$p(P)$ がどのように表されるかを考えてみよう．

$\mathfrak{u}(n)$ または $\mathfrak{su}(n)$ 上の $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を，元 X, Y に対して

$$\langle X, Y\rangle=-\mathrm{Tr}XY$$

で定義する．

命題 4.2.4 向きづけられたコンパクトな4次元 C^∞ 多様体 M 上の $U(n)$-主ファイバー束を P, P に同伴したベクトル束 $P\times_\rho C^n$ を E とし，1次，2次の Chern 類をそれぞれ c_1, c_2 で表せば，P の不変量 $p(P)$ は

$$p(P)=4\pi^2\int_M\{c_1^2(E)-2c_2(E)\} \tag{4.2.9}$$

で与えられる．

$G=SU(n)$ の場合には

$$p(P) = -8\pi^2 \int_M c_2(E) \tag{4.2.10}$$

である．

[Stokes の定理により，de Rham コホモロジー群の元の M 上の積分は意味をもつ.]

〔**証明**〕 P 上の接続を一つとって固定する．それを A とする．曲率 $F(A)$ は $\mathfrak{u}(n)$ に値をもつ 2-形式で，成分が 2-形式の行列 $F(A)=(F^i_j)_{1\leq i,j\leq n}$ で表される．$\boldsymbol{E}$ の 1 次の Chern 類 $c_1(\boldsymbol{E})$ は

$$f_1(X) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\mathrm{Tr}X$$

で与えられ，2 次の Chern 類 $c_2(\boldsymbol{E})$ は

$$\begin{aligned} f_2(X) &= \frac{-1}{4\pi^2}\sum_{i<j}(X^i_iX^j_j - X^j_iX^i_j) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\sum_{i,j}(X^i_iX^j_j - X^j_iX^i_j) \\ &= -\frac{1}{8\pi^2}\{(\mathrm{Tr}X)^2 - \mathrm{Tr}(XX)\}, \quad X = F(A) \end{aligned}$$

で与えられる．(第 3 章 3.6 節 (3.6.8))

よって

$$\begin{aligned} \langle X, X\rangle &= -\mathrm{Tr}(XX) = -8\pi^2 f_2(X) - (\mathrm{Tr}X)^2 \\ &= 4\pi^2[\{f_1(X)\}^2 - 2f_2(X)] \end{aligned}$$

すなわち

$$p(P) = 4\pi^2 \int_M \{c_1^2(\boldsymbol{E}) - 2c_2(\boldsymbol{E})\}$$

である．

$G=SU(n)$ の場合は，$X\in\mathfrak{su}(n)$ に対して $\mathrm{Tr}X=0$ であるから，$c_1(\boldsymbol{E})=0$ である．

注 3. (i) 複素ベクトル束 $\boldsymbol{E}$ を実ベクトル束 $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{R}}$ とみたとき，$c_1^2(\boldsymbol{E})-2c_2(\boldsymbol{E})$ は $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{R}}$ の 1 次 Pontrjagin 類 $p_1(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{R}})$ に一致する．よって $p(P)=4\pi^2p_1(\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{R}})$ である．

(ii) 与えられた主ファイバー束 $P(M,G)$ に対し，(M は 4 次元として) $p(P)$ の符号の正負は，P 上に (反) 自己双対接続が存在するための必要条件である (命題 4.2.3)

が，必ずしも十分条件にはならない．それは，2次元複素射影空間 $M=P^2(C)$ 上の，$c_1=0$ かつ $\int_M c_2=1$ なる2次元複素ベクトル束 $\boldsymbol{E}$ に同伴する $SU(2)$-主ファイバー束上には，反自己双対接続が存在しないということが，代数幾何学で知られているからである．

問 5.　P を向きづけられた4次元 C^∞ 多様体 M 上の主ファイバー束とする．h_1, h_2 は互いに共形的な M 上の Riemann 計量である（すなわち正の関数 $f\in C^\infty(M)$ が存在して $h_1=fh_2$ である）とする．このとき計量 h_i に関する Yang–Mills 汎関数 $\mathcal{YM}_{h_i}$ $(i=1, 2)$ は一致する．すなわち

$$\mathcal{YM}_{h_1}(A)=\mathcal{YM}_{h_2}(A), \qquad A\in\mathcal{A}_P$$

であることを示せ．

〔ヒント．Hodge 作用素 $*$ が共形的不変であることを用いよ（第1章　1.4節例)〕．

この問から，4次元 Euclid 空間上のインスタントンを立体射影によって4次元球面 S^4 上に移してやると，それは S^4 上の標準計量に関して自己双対的となる（第1章　1.4節　例)．換言すれば，$\boldsymbol{R}^4$ 上の Yang–Mills 接続を見い出すことは，とりも直さず S^4 上に Yang–Mills 接続を探し出すことになる（第5章　5.2節)．

問 6.　変換　$f:\boldsymbol{R}^4\longrightarrow\boldsymbol{R}^4$;　$x\longmapsto y=x/\lambda$,　$\lambda>0$ を**スケール変換**という．

$\boldsymbol{R}^4$ 上の接続 $A(x)=\sum_{i=1}^4 A_i(x)dx^i$ に対して

$$(f^*A)(x)=\sum_{i=1}^4 A_i\left(\frac{x}{\lambda}\right)\frac{dx^i}{\lambda}$$

とおくとき

$$\int_{\boldsymbol{R}^4}|F(A)|^2(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^4=\int_{\boldsymbol{R}^4}|F(f^*(A))|^2(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^4$$

であることを示せ．

4.3　第2変分公式

前節では，（反）自己双対接続を Yang–Mills 汎関数の絶対最小値をとる接続として特徴づけた．本節では，ふたたび話を一般の Yang–Mills 接続にもどし，Yang–Mills 汎関数の第2変分について論じる．

Yang–Mills 接続は，Yang–Mills 汎関数 $\mathcal{YM}$ の第1変分を零にする接続として定義された．そこで次の問題はその点で $\mathcal{YM}$ が極小となるのか，ある

いはその点が$\mathcal{YM}$の変曲点になるのかということである．この問題を論ずるためには，第2変分 $\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{YM}(A_t)|_{t=0}$ を調べる必要がある．

Mを向きづけられたコンパクトなn次元 Riemann 多様体とする．主ファイバー束 $P(M, G)$ 上の接続の集合 $\mathcal{A}_P$ 内に一つの接続 A を固定し，Aを通る$\mathcal{A}_P$内の曲線 A_t を考えると，A_t の $t=0$ での接ベクトルは $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ の元を定めるから，$\mathcal{A}_P$ の A での接ベクトル空間 $T_A(\mathcal{A}_P)$ は $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ に一致する．そこで $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ の元を $T_A(\mathcal{A}_P)$ の元とみて，A の**無限小変形**という．

他方，ゲージ変換群 $\mathcal{G}_P$ の A を通る軌道 $\{g^*(A); g\in\mathcal{G}_P\}$ の A における接ベクトル全体は，共変微分 $D_A: \Omega^0(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ の像 $\mathrm{Im} D_A$ に等しい．なぜなら，指数写像 $\exp: \Omega^0(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \mathcal{G}_P$ の像 $g_t=\exp t\Phi$, $\Phi\in\Omega^0(\mathfrak{g}_P)$, $t\in \boldsymbol{R}$ は，$\mathcal{G}_P$ の1パラメータ部分群であり，逆に1パラメータ部分群はこのように表現できて，$g_t{}^*(A)$ の $t=0$ での接ベクトルは $D_A\Phi$ である（第3章 3.4節 問11）からである．

命題 4.3.1 $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ は次のように直交直和的に分解する．

(4.3.1) $$\Omega^1(\mathfrak{g}_P) = \mathrm{Im} D_A \oplus \mathrm{Ker}\,\delta_A$$

ここに，δ_A は D_A の余微分作用素で

$$\delta_A = D_A^*: \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^0(\mathfrak{g}_P)$$

である．

（証明は［26］定理9.1参照．証明には楕円型偏微分作用素の一般論が用いられる．）

主ファイバー束 $P=P(M,G)$ 上の接続 A の曲率 $F(A)$ を

$$F(A) = \frac{1}{2}\sum_{i,j} F_{ij}dx^i\wedge dx^j$$

と局所的に表しておいて，ベクトル束の間の束写像

$$\mathcal{F}_A: \mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^1(M) \longrightarrow \mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^1(M)$$

を次の対応で定義する．

$$\alpha = \sum\alpha_i(x)dx^i \longmapsto \mathcal{F}_A(\alpha) = \sum h^{jk}(x)[F_{ji}(x), \alpha_k(x)]dx^i$$

定理 4.3.2 Aを P 上の Yang–Mills 接続とするとき，Yang–Mills 汎関数の A での第2変分は

(4.3.2) $$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{YM}(A_t)|_{t=0}=\int_M\langle\delta_A d_A\alpha+\mathfrak{F}_A(\alpha),\alpha\rangle dv$$

で与えられる．ここに $\alpha=\frac{d}{dt}A_t|_{t=0}$ である．

〔証明〕 $A_0=A$ である曲線を A_t とし，$a_t=A_t-A$ とおくと，$a_t\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ で

$$F(A_t)=F(A)+d_Aa_t+\frac{1}{2}[a_t\wedge a_t]$$

である．$F_t=F(A_t)$ とおいて，t で微分すると

$$\frac{d}{dt}F_t=d_A\dot{a}_t+[\dot{a}_t\wedge a_t]$$

$$\frac{d^2}{dt^2}F_t=d_A\ddot{a}_t+[\dot{a}_t\wedge\dot{a}_t]+[\ddot{a}_t\wedge a_t]$$

また

$$\frac{1}{2}\ \frac{d^2}{dt^2}\langle F_t,F_t\rangle=\left\langle\frac{d}{dt}F_t,\ \frac{d}{dt}F_t\right\rangle+\left\langle\frac{d^2}{dt^2}F_t,F_t\right\rangle$$

であるから

(4.3.3) $$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{YM}(A_t)|_{t=0}=\int_M\{\langle d_A\alpha,d_A\alpha\rangle+\langle d_A\ddot{a}_t+[\alpha\wedge\alpha],\ F(A)\rangle\}dv$$

ところで

$$\delta_AF(A)=0$$

であるから，(4.3.3) は

(4.3.4) $$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{YM}(A_t)|_{t=0}=\int_M\{\langle\delta_Ad_A\alpha,\alpha\rangle+\langle[\alpha\wedge\alpha],\ F(A)\rangle\}dv$$

となる．ここで

$$[\alpha\wedge\alpha]=\sum_{i,j}[\alpha_i,\alpha_j]\ dx^i\wedge dx^j=2\sum_{i<j}[\alpha_i,\alpha_j]dx^i\wedge dx^j$$

であるから

$$\langle[\alpha\wedge\alpha],\ F(A)\rangle=\frac{1}{2}\sum h^{ik}h^{jl}\langle[\alpha\wedge\alpha]_{ij},F_{kl}\rangle$$
$$=\sum h^{ik}h^{jl}\langle[\alpha_i,\alpha_j],F_{kl}\rangle=\sum_i h^{ik}\langle\alpha_i,\sum h^{jl}[F_{lk},\alpha_j]\rangle$$
$$=\langle\alpha,\mathfrak{F}_A(\alpha)\rangle$$

よって，(4.3.2) がえられる．

系 4.3.3 とくに，α が $\delta_A\alpha=0$ をみたす場合には次のように書ける．

$$(4.3.5)\quad \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{YM}(A_t)\,|_{t=0}=\int_M\langle(\delta_A d_A+d_A\delta_A)\alpha+\mathcal{F}_A(\alpha),\alpha\rangle dv$$

注 4. 作用素 $\mathcal{S}_A:\Omega^1(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ を次のように定義する.

$$\mathcal{S}_A(\alpha)=\Delta_A\alpha+\mathcal{F}_A(\alpha),\quad \Delta_A=\delta_A d_A+d_A\delta_A$$

$\mathcal{S}_A$ は自己随伴的楕円型2階偏微分作用素で **Jacobi 作用素** といわれる. $\mathcal{S}_A$ を用いると, (4.3.5) は次のように書ける.

$$(4.3.6)\quad \frac{d^2}{dt^2}\mathcal{YM}(A_t)\,|_{t=0}=\int_M\langle\mathcal{S}_A(\alpha),\alpha\rangle dv$$

問 7. A を Yang–Mills 接続とすれば, 任意の $\alpha\in\mathrm{Im}D_A$ に対して

$$\delta_A d_A\alpha+\mathcal{F}_A(\alpha)=0$$

であることを示せ. (ヒント. Ricci の公式 (3.3.11) を用いよ.)

定義 4.3.4 Yang–Mills 接続 A は

$$(4.3.7)\quad \int_M\langle\mathcal{S}_A(\alpha),\alpha\rangle dv\geqq 0$$

が, 任意の $\alpha\in\mathrm{Ker}\,\delta_A\subset\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ について成り立つとき**弱安定**であるという.

注 5. (i) 上の問によれば, 弱安定性の定義は, 任意の $\alpha\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ について

$$(4.3.8)\quad \int_M\langle\delta_A d_A\alpha+\mathcal{F}_A(\alpha),\alpha\rangle dv\geqq 0$$

が成り立つことである, としてもよい.

(ii) 自己随伴的楕円型作用素 $\mathcal{S}_A$ の, 部分空間 Ker δ_A への制限は, 離散的な固有値 $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3\cdots\cdots\longrightarrow\infty$ に対応する有限次元固有空間 $E_{\lambda_1}, E_{\lambda_2}, E_{\lambda_3},\cdots\cdots$ をもつ.

A の**指数** $i(A)$ を

$$i(A)=\dim(E_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus E_{\lambda_k}),\quad \lambda_1<\cdots<\lambda_k<0\leqq\lambda_{k+1}$$

で定義し, A の**退化次数** $n(A)$ を $n(A)=\dim E_0$ で定義する. A が弱安定とは $i(A)=0$ のことである.

命題 4.3.5 $\Phi\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ に対して, $\Phi\circ Ric\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ を

$$(\Phi\circ Ric)_i=\sum_j R_i^j\Phi_j=\sum_{j,k}h^{jk}R_{ik}\Phi_j$$

(R_{ij} は計量 h についての Ricci 曲率テンソル)

と定義すると

(4.3.9) $$\varDelta_A\Phi=\tilde{D}_A{}^*\tilde{D}_A\Phi+\mathfrak{F}_A(\Phi)+\Phi\circ Ric$$

である.

〔証明〕 $\Phi=\sum\Phi_i dx^i$ に対して

$$d_A\Phi=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\tilde{D}_i\Phi_j-\tilde{D}_j\Phi_i)dx^i\wedge dx^j$$

であるから，$\delta_A d_A\Phi$ の i-成分は

$$-\sum_{j,k}h^{jk}\tilde{D}_j(d_A\Phi)_{ki}=-\sum_{j,k}h^{jk}\tilde{D}_j(\tilde{D}_k\Phi_i-\tilde{D}_i\Phi_k)$$

となる．また，$\delta_A\Phi=-\sum h^{jk}\tilde{D}_j\Phi_k$ であるから

$$d_A\delta_A\Phi=-\sum\tilde{D}_i(h^{jk}\tilde{D}_j\Phi_k)dx^i=-\sum h^{jk}\tilde{D}_i\tilde{D}_j\Phi_k dx^i$$

と書かれる．よって，$\varDelta_A\Phi=\delta_A d_A\Phi+d_A\delta_A\Phi$ の i 成分は

$$-\sum h^{jk}\tilde{D}_j\tilde{D}_k\Phi_i+\sum h^{jk}\tilde{D}_j\tilde{D}_i\Phi_k-\sum h^{jk}\tilde{D}_i\tilde{D}_j\Phi_k$$
$$=(\tilde{D}_A{}^*\tilde{D}_A\Phi)_i-\sum h^{jk}[F_{ij},\Phi_k]-\sum h^{jk}(-R^t_{kij})\Phi_t$$

これは (4.3.9) の右辺の i-成分である.

系 4.3.6 S^n 上で，標準計量を h とすると，$\Phi\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ に対して

(4.3.10) $$\varDelta_A\Phi=\tilde{D}_A{}^*\tilde{D}_A\Phi+\mathfrak{F}_A(\Phi)+(n-1)\Phi$$

である.

〔証明〕 (S^n,h) では Ricci 曲率テンソルが $(n-1)h$ に等しいことから上式がえられる.

注 6. (4.3.9) は **Bochner-Weitzenböck の公式**とよばれ，$\varDelta_A$ と $\tilde{D}^*\tilde{D}$ (粗な Laplace 作用素という) の関係を表している.

次の (4.3.11) は $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ 上の Bochner-Weitzenböck の公式である.

命題 4.3.7 $\Phi=\frac{1}{2}\sum\Phi_{ij}dx^i\wedge dx^j\in\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ に対して

(4.3.11) $$\varDelta_A\Phi=\tilde{D}_A^*\tilde{D}_A\Phi+\mathfrak{F}_A^{(2)}(\Phi)+\Phi\circ Ric+\Phi\circ R$$

である．ここに

$$\mathfrak{F}_A^{(2)}:\mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^2(M)\longrightarrow\mathfrak{g}_P\otimes\Lambda^2(M)$$

は次の式で定義される.

(4.3.12) $\mathcal{F}_A^{(2)}(\Phi)=\dfrac{1}{2}\sum_{i,j,k,l} h^{kl}\{[F_{ki},\Phi_{lj}]-[F_{kj},\Phi_{li}]\}dx^i\wedge dx^j$

また，$\Phi\circ Ric$，$\Phi\circ R$ はともに $\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ の元で

$$(\Phi\circ Ric)_{ij}=\sum_t (R_i^t\Phi_{tj}+R_j^t\Phi_{it})$$
$$(\Phi\circ R)_{ij}=\sum_{k,l} h^{kl}R_{kij}^t\Phi_{lt}$$

である．

〔証明〕 $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ での Bochner-Weitzenböck の公式の場合と同様である．

系 4.3.8 S^n 上で，標準計量を h とすれば，$\Phi\in\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ に対して

(4.3.13) $$\Delta_A\Phi=\tilde{D}_A{}^*\tilde{D}_A\Phi+\mathcal{F}_A^{(2)}(\Phi)+2(n-2)\Phi$$

である．

これら Bochner-Weitzenböck の公式を用いることによって，n 次元球面 S^n 上の Yang-Mills 接続の弱安定性定理がえられる．

まず，S^n 上のベクトル場のつくるベクトル空間 $\mathcal{V}$ を

(4.3.14) $\mathcal{V}=\{\mathrm{grad}\, f; f$ は $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の線形形式の S^n 上への制限$\}$

と定義する．この線形形式 $f:\boldsymbol{R}^{n+1}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ は，適当な $v\in\boldsymbol{R}^{n+1}$ をとると

$$f(x)=(v,x)\quad x\in\boldsymbol{R}^{n+1}$$

と書ける．このとき，$V_x=(\mathrm{grad}\, f)_x$ は

$$V_x=v-(v,x)x,\ \ x\in S^n$$

であり，対応 $v\longmapsto V$ は同型写像 $\boldsymbol{R}^{n+1}\longrightarrow\mathcal{V}$ を与える

補題 4.3.9 $\Phi\in\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$，$V$ は勾配ベクトル場として，内部積 $i_V\Phi\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ を α で表す．このとき $\delta_A\Phi=0$ ならば $\delta_A\alpha=0$ である．

〔証明〕 勾配ベクトル場を $V=\sum_i V^i\dfrac{\partial}{\partial x^i}$ で表す．ここに，$V^i=\sum_j h^{ij}V_j$，$V_j=\dfrac{\partial f}{\partial x^j}$ である．

$\delta_A\Phi=0$ であるから

$$\begin{aligned}\delta_A\alpha&=-\sum h^{ij}\tilde{D}_i\alpha_j=-\sum h^{ij}\tilde{D}_i(V^k\Phi_{kj})\\&=-\sum h^{ij}\{(\tilde{D}_iV^k)\Phi_{kj}+V^k(\tilde{D}_i\Phi_{kj})\}\\&=-\sum h^{ij}h^{kl}\nabla_iV_l\Phi_{kj}\end{aligned}$$

ここで，$\nabla_i V_j$ は i,j について対称，Φ_{ij} は交代なので，$\delta_A \alpha=0$ である．

補題 4.3.10 $V\in\mathcal{V}$ については

$$\nabla_X V=-f(x)X,\quad X\in T_x S^n \tag{4.3.15}$$

$$\nabla^*\nabla V=V \tag{4.3.16}$$

が成り立つ．

〔**証明**〕 $x\in S^n$ における $Y\in T_x \boldsymbol{R}^{n+1}$ に対して，Y^T で Y の S^n に接する成分を表すことにする．(S^n, h) 上の Levi-Civita 接続 ∇ は，$\boldsymbol{R}^{n+1}$ 上の自然な接続 $\bar{\nabla}$ を用いて，S^n 上のベクトル場 Y に対しては $\nabla Y=(\bar{\nabla}Y)^T$ と書ける．したがって

$$\begin{aligned}\nabla_X V&=[\bar{\nabla}_X\{v-(v,x)x\}]^T=[-(v,X)x-(v,x)X]^T\\&=-(v,x)X=-f(x)X\end{aligned}$$

座標系を使って書くと，$\nabla_i V^j=-f\delta_i^j$ であるから

$$(\nabla^*\nabla V)^k=-\sum h^{ij}\nabla_i\nabla_j V^k=-\sum h^{ij}\nabla_i(-f\delta_j^k)=\sum h^{ij}\nabla_i f\delta_j^k=V^k$$

これで (4.3.16) がえられた．

定理 4.3.11 A を $P=P(S^n, G)$ 上の Yang-Mills 接続，$\Phi\in\Omega^2(\mathfrak{g}_P)$ を調和 2-形式 $(d_A\Phi=0,\ \delta_A\Phi=0)$ とする．$\mathcal{V}$ 上の2次形式 $Q_\Phi:\mathcal{V}\longrightarrow\boldsymbol{R}$ を

$$Q_\Phi(V)=\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{YM}(A_t)|_{t=0},\quad A_t=A+t(i_V\Phi) \tag{4.3.17}$$

で定義すると

$$\mathrm{Tr}\,Q_\Phi=2(4-n)\int_{S^n}|\Phi|^2 dv \tag{4.3.18}$$

である．ここに，$\mathrm{Tr}\,Q_\Phi$ は，$\{e_1, e_2, \cdots, e_{n+1}\}$ を $\boldsymbol{R}^{n+1}$ の正規直交基底として，$\sum_i Q_\Phi(e_i)$ を表す．

〔**証明**〕 $\delta_A(i_V\Phi)=0$ であるから

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{YM}(A_t)|_{t=0}=\int_{S^n}\langle\mathcal{S}_A(i_V\Phi), i_V\Phi\rangle dv \tag{4.3.19}$$

系 4.3.6 を用いると

$$\mathcal{S}_A(i_V\Phi)=\tilde{D}_A{}^*\tilde{D}_A(i_V\Phi)+(n-1)i_V\Phi+2\mathcal{F}_A(i_V\Phi) \tag{4.3.20}$$

さらに，補題 4.3.10 における (4.3.16) により

(4.3.21) $$\tilde{D}_A{}^*\tilde{D}_A(i_V\Phi)=i_V\Phi+i_V(\tilde{D}_A{}^*\tilde{D}_A\Phi)$$

したがって

(4.3.22) $$\mathcal{S}_A(i_V\Phi)=n(i_V\Phi)+i_V(\tilde{D}_A{}^*\tilde{D}_A\Phi)+2\mathcal{F}_A(i_V\Phi)$$

系 4.3.8 により

(4.3.23) $$0=\Delta_A\Phi=\tilde{D}_A{}^*\tilde{D}_A\Phi+2(n-2)\Phi+\mathcal{F}_A^{(2)}(\Phi)$$

すなわち

(4.3.24) $$\tilde{D}_A{}^*\tilde{D}_A\Phi=-2(n-2)\Phi-\mathcal{F}_A^{(2)}(\Phi)$$

よって

(4.3.25) $$\mathcal{S}_A(i_V\Phi)=(4-n)i_V\Phi+2\mathcal{F}_A(i_V\Phi)-i_V\mathcal{F}_A^{(2)}(\Phi)$$

したがって

(4.3.26) $$Q_\Phi(V)=(4-n)\int_{S^n}|i_V\Phi|^2dv+\int_{S^n}\langle 2\mathcal{F}_A(i_V\Phi)-i_V\mathcal{F}_A^{(2)}(\Phi),\ i_V\Phi\rangle dv$$

$\mathrm{Tr}\,Q_\Phi=\sum_{i=1}^{n+1}Q_\Phi(e_i)$ であるから，ノルムの定義に注意すると

(4.3.27) $$\mathrm{Tr}\,Q_\Phi=2(4-n)\int_{S^n}|\Phi|^2dv+\int_{S^n}\mathrm{Tr}\{V\longrightarrow\langle 2\mathcal{F}_A(i_V\Phi)-i_V\mathcal{F}_A^{(2)}(\Phi),\ i_V\Phi\rangle\}\,dv$$

ここで，点 $x\in S^n$ において，右辺の第2項の被積分関数を考察する．

$\mathcal{V}$ の基底 $\{e_1,\cdots,e_n,e_{n+1}\}$ を，$e_1,\cdots,e_n$ は T_xS^n の正規直交基底であり，e_{n+1} は x となるようにする．さらに，x の近傍での座標系 $\{x^1,\cdots,x^{n+1}\}$ を，$(\partial/\partial x^i)_x=e_i$ $(1\leqq i\leqq n+1)$ となるようにとる．

(4.3.28) $$\begin{aligned}&\{2\mathcal{F}_A(i_V\Phi)-i_V\mathcal{F}_A^{(2)}(\Phi)\}\ \text{の}\ i\ \text{成分}\\&=\sum_{j,k,l}h^{kl}V^j\{[F_{ki},\Phi_{jl}]+[F_{kj},\Phi_{il}]\}\end{aligned}$$

であるから

(4.3.29) $$\begin{aligned}&\mathrm{trace}\ \{V\longrightarrow\langle 2\mathcal{F}_A(i_V\Phi)-i_V\mathcal{F}_A^{(2)}(\Phi),i_V\Phi\rangle\}\\&=\sum\delta^{si}\delta^{tj}\langle\delta^{kl}\{[F_{ki},\Phi_{jl}]+[F_{kj},\Phi_{il}]\},\Phi_{st}\rangle\end{aligned}$$

ここで，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ の中の左側の因子は i,j について対称であり，右側の因子は交代であるから，(4.3.29) は零となり，(4.3.18) が導かれる．

系 4.3.12 $n\geqq 5$ のとき，(S^n,h) 上には平坦でない弱安定的な Yang-Mills

接続は存在しない．

〔**証明**〕 上の定理において，Φ として Yang-Mills 接続の曲率 $F(A)$ をとればこの系がえられる．

$n=4$ のときは，上の定理を出発点として，4次元の特別な性質を利用することによって，次の定理がえられる．

定理 4.3.13 A を S^4 上の弱安定的な Yang-Mills 接続とする．主ファイバー束の構造群が $SU(2)$，$SU(3)$ または $U(2)$ のときには，A は自己双対的または，反自己双対的となる（[26] 定理 10.2 [41] 定理 7.12）．

第5章　R^4 上の Yang–Mills 接続

5.1　Yang–Mills–Higgs 場

Yang–Mills 接続は，$\mathcal{YM}(A)=\frac{1}{2}\int |F(A)|^2 dv$ の変分問題の解を与える接続として定義された（第4章）．接続は同伴ベクトル束上に共変微分をひき起こすから，Yang–Mills 汎関数に共変微分のノルムの2乗 $\int |D_A\Phi|^2 dv$ 等をつけ加えたものを考察する方がより一般的であろう．

M を向きづけられた Riemann 多様体（必ずしもコンパクトではない）とし，主ファイバー束 $P=P(M,G)$ に同伴したベクトル束を $\boldsymbol{E}=P\times_\rho E$ とする．E は正値内積 $(\cdot,\cdot)$ をもち，表現 ρ はこの内積に関して E の直交変換を与えていると仮定する．ここで，次のような汎関数を考える；

(5.1.1)
$$\boldsymbol{a}:\mathcal{A}_P\times\Omega^0(\boldsymbol{E})\longrightarrow \boldsymbol{R}$$
$$(A,\Phi)\longmapsto \mathcal{YM}(A)+\frac{1}{2}\int_M\{|D_A\Phi|^2+\frac{\lambda}{4}(|\Phi|^2-1)^2\}dv$$

λ は定数で，$\lambda\geqq 0$．第3項は Higgs の**自己相互作用項**とよばれる項である．

この汎関数 $\boldsymbol{a}$ の第1変分を零にする (A,Φ) を **Yang–Mills–Higgs 場**（A を **Yang–Mills 場**，Φ を **Higgs 場**）という．

命題 5.1.1　汎関数 $\boldsymbol{a}$ の変分方程式は

(5.1.2)
$$\delta_A F(A)=J$$
$$\delta_A D_A\Phi=-\frac{\lambda}{2}(|\Phi|^2-1)\Phi$$

である．

ここに，$J\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ は，次の (5.1.3) で定義され，**カレント**とよばれる．

(5.1.3)
$$J=-\sum_a E_a(\rho(E_a)\Phi, D_A\Phi)$$

$\{E_a\}$ は Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の正規直交基底．

〔証明〕 $(A,\Phi)\in\mathcal{A}_P\times\Omega^0(E)$ を Yang-Mills-Higgs 場とする．(A,Φ) を通る曲線 (A_t,Φ_t) を

$$A_t=A+ta,\quad \Phi_t=\Phi+t\phi$$

とする．ここで，$a\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$，$\phi\in\Omega^0(E)$ はともに台がコンパクトであると仮定する．

t の2次以上の項を無視すると

$$\begin{aligned}
&F(A_t) \text{ は，} F(A)+td_A a\\
&D_{A_t}\Phi_t \text{ は，} D_A\Phi+tD_A\phi+t\rho(a)\Phi\\
&|\Phi_t|^2 \text{ は，} |\Phi|^2+2t(\Phi,\phi)
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}a(A_t,\Phi_t)\Big|_{t=0}\\
&=\frac{d}{dt}\mathcal{YM}(A_t)\Big|_{t=0}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_M\Big\{|D_{A_t}\Phi_t|^2+\frac{\lambda}{4}(|\Phi_t|^2-1)^2\Big\}dv\Big|_{t=0}\\
&=\int_M\langle F(A),d_A a\rangle dv\\
&\quad+\int_M\Big\{(D_A\Phi,D_A\phi)+(D_A\Phi,\rho(a)\Phi)+\frac{\lambda}{2}(|\Phi|^2-1)(\Phi,\phi)\Big\}dv\\
&=\int_M\{\langle\delta_A F(A),a\rangle+(D_A\Phi,\rho(a)\Phi)\}dv\\
&\quad+\int_M(D_A^*D_A\Phi+\frac{\lambda}{2}(|\Phi|^2-1)\Phi,\phi)dv
\end{aligned}$$

これから，(5.1.2) がえられる．

M を Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^n$ とすると，$\boldsymbol{R}^n$ 上では汎関数 a に対して **Maxwell の応力テンソル**（または，**エネルギー・運動量テンソル**）

$$T=\sum_{i,j}T_{ij}dx^i\otimes dx^j$$

が次のように定義される．

$$T_{ij}=\sum_k\langle F_{ik},F_{jk}\rangle-\frac{1}{4}\delta_{ij}\sum_{k,l}\langle F_{kl},F_{kl}\rangle+(D_i\Phi,D_j\Phi)-\frac{1}{2}\delta_{ij}\sum_k(D_k\Phi,D_k\Phi)-\frac{\lambda}{8}\delta_{ij}(|\Phi|^2-1)^2 \tag{5.1.4}$$

命題 5.1.2 (A, Φ) が Yang–Mills–Higgs 場ならば

$$\sum_i \nabla_i T_{ji} = 0 \qquad (\delta T = 0) \tag{5.1.5}$$

である（[28] 第2章 §2）.

問 1. 命題5.1.2を証明せよ.

命題 5.1.3 $\boldsymbol{R}^n$ 上で，Yang–Mills–Higgs 場 (A, Φ) の汎関数 a の値が有限ならば，応力テンソル T について

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} T_{ij}\, dv = 0, \quad 0 \leqq i, j \leqq n \tag{5.1.6}$$

である.

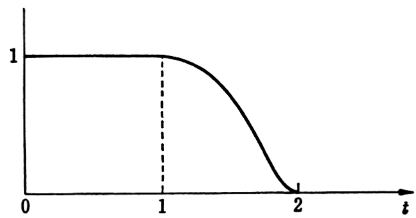


図 5.1 $b(t)$ のグラフ

〔証明〕 単調減少 C^∞ 関数

$$b : \{t \in \boldsymbol{R};\ t > 0\} \longrightarrow \boldsymbol{R};$$

$$0 \leqq b(t) \leqq 1 \tag{5.1.7}$$
$$b(t) = 1 \quad (t \leqq 1)$$
$$b(t) = 0 \quad (t \geqq 2)$$

に対して

$$b_R(t) = b(t/R), \quad R > 0$$

とおくと，Green の公式（第1章 1.3節）から

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} (x^k b_R(|x|) T_{ij}) dv = 0 \tag{5.1.8}$$

また，(5.1.5) から

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} T_{ik}(x) b_R(|x|) dv = -\int_{\boldsymbol{R}^n} \sum x^k \left(\frac{\partial}{\partial x^j} b_R(|x|) \right) \cdot T_{ij}\, dv \tag{5.1.9}$$

である.

R に依存しない正の数 k で

$$(1 - b_{kR}(t)) \frac{d}{dt} b_R(t) = \frac{d}{dt} b_R(t) \tag{5.1.10}$$

をみたすものが存在するので，不等式

$$|x|\left|\frac{\partial}{\partial x^j}b_R(|x|)\right|\leqq K$$

(x は $\boldsymbol{R}^n$ の任意の点，K は x，R に依存しない定数)

を用いると

$$\left|\int_{\boldsymbol{R}^n}T_{ij}(x)b_R(|x|)dv\right|\leqq K\sum_j\int(1-b_{kR}(|x|))|T_{ij}(x)|dv \tag{5.1.11}$$

である．ところが，(5.1.4) により $|T_{ij}(x)|$ は $a(A,\Phi)$ の被積分関数で上からおさえられているので，$\boldsymbol{R}^n$ 上で積分可能である．したがって，(5.1.11) の右辺は $R\longrightarrow\infty$ のとき零に近づく．左辺も同様に

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}|T_{ij}(x)|dv<c<+\infty$$

であるから，積分の収束定理によって

$$\int_{\boldsymbol{R}^n}T_{ij}(x)dv=\lim_{R\to\infty}\int_{\boldsymbol{R}^n}T_{ij}(x)b_R(|x|)dv=0 \tag{5.1.12}$$

となる．

命題 5.1.4 (A,Φ) を汎関数 a の値が有限な $\boldsymbol{R}^n$ 上の Yang-Mills-Higgs 場とすれば，等式

$$\left(2-\frac{n}{2}\right)\|F(A)\|^2=\left(\frac{n}{2}-1\right)\|D_A\Phi\|^2+\frac{n\lambda}{8}\int(|\Phi|^2-1)^2\,dv \tag{5.1.13}$$

が成り立つ．

〔証明〕 (5.1.6) において，$i=j$ とおき i について和をとればよい．

系 5.1.5 (A,Φ) は汎関数 a の値が有限な $\boldsymbol{R}^n$ 上の Yang-Mills-Higgs 場であるとすると，次の (i)～(v) が成り立つ．

(i) $n<4$ ならば，$\lambda=0$，$\Phi=0$ という条件での Yang-Mills 接続 A は平坦である，すなわち $F(A)=0$.

(ii) $n<4$ かつ $|\Phi|=1$ ならば，$F(A)=0$ かつ Φ は平行である，すなわち $D_A\Phi=0$.

(iii) $n=2$ かつ $\lambda=0$ ならば，(A,Φ) は $F(A)=0$ かつ $|\Phi|=$ 一定である．

(iv) $n>4$ ならば，$F(A)=0$，$D_A\Phi=0$ かつ $|\Phi|=$ 一定である．

(v) $n=4$ ならば，$D_A\Phi=0$ かつ $|\Phi|=$ 一定であり，A は Yang-Mills 接続，すなわち $\delta_A F(A)=0$ である．

〔証明〕 (i)，(iv) は，(5.1.13) から直ちに導かれる．

(v) は，(5.1.13) と (5.1.2) から結論される．

(ii) の証明．(5.1.2) により，$D_A^*D_A\Phi=0$ であるから

$$0=\Delta|\Phi|^2=-2|D_A\Phi|^2+2(\Phi, D_A^*D_A\Phi)=-2|D_A\Phi|^2$$

よって，$D_A\Phi=0$. したがって，(5.1.13) から $F(A)=0$ である．

(iii) の証明．まず，(5.1.13) から $F(A)=0$. さらに，$\lambda=0$ であるから，$D_A^*D_A\Phi=0$ である．$\boldsymbol{R}^2$ 上の平坦な接続 A に対して，第3章命題 3.2.4 ($\boldsymbol{R}^2$ が単連結なので，$V=\boldsymbol{R}^2$ ととれる) により，ゲージ変換 $g:\boldsymbol{R}^2\longrightarrow G$ がとれて，$g^*(A)=0$ となる．したがって，最初から $A=0$ と仮定してよい．このとき，$D_A^*D_A$ は Euclid 計量に関する Laplace 作用素 Δ に一致する．

$f\in C^\infty(\boldsymbol{R}^2)$ で

$$\int|df|^2dv \text{ が有界，かつ } \Delta f=0$$

となるのは定数に限るから，g の変換に関して不変なノルム $|\Phi|^2$ は $\boldsymbol{R}^2$ 上で一定である．

問 2. (i) 3次元 Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^3$ 上の主ファイバー束を $P=\boldsymbol{R}^3\times G$ とする．

汎関数 $a:\mathcal{A}_P\times\Omega^0(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow\boldsymbol{R}$

$$(A,\Phi)\longmapsto \mathcal{YM}(A)+\frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{R}^3}|D_A\Phi|^2dv$$

に対する変分方程式は次の方程式であることを示せ．

$$(5.1.14)\qquad \begin{aligned} &*d_A*F(A)+[\Phi, D_A\Phi]=0\\ &*d_A*D_A\Phi=0\end{aligned}$$

(ii) 次の (5.1.15) をみたす (A,Φ) は，(5.1.14) をみたすことを示せ．

$$(5.1.15)\qquad *F(A)=\pm D_A\Phi$$

[ヒント．Ricci の公式，Bianchi の恒等式を用いよ．]

この式を，**Bogomol'nyi 方程式**，あるいは**モノポール方程式**という．

例 1. $G=SU(2)$ に対しては，モノポール方程式の解 (A,Φ) で **Prasad-**

Sommerfield モノポールとよばれるものが知られている（[28] 第4章 §1）．

$$r=|x|, \quad \frac{\partial}{\partial r}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3}x^i\frac{\partial}{\partial x^i}=\frac{1}{r}(x^1,x^2,x^3)$$

とする．Pauli 行列を

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

として

$$e_j=\frac{\sqrt{-1}}{2}\sigma_j \quad (j=1,2,3)$$

とおくと，$\{e_1,e_2,e_3\}$ は Lie 代数 $\mathfrak{su}(2)$ の基底となる．記号 $e=(e_1,e_2,e_3)$，$dx=(dx^1,dx^2,dx^3)$ を用い，さらに $\frac{\partial}{\partial r}\times e$ は形式的なベクトル積を表すことにして

$$A(x)=\left(\frac{1}{\sinh r}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\times e\right)\cdot dx$$

$$\Phi(x)=\mp\left(\frac{1}{\tanh r}-\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r}\cdot e\right)$$

とおくと，(A,Φ) は $a(A,\Phi)=4\pi$ なるモノポール方程式の解を与える．

5.2 R^4 上の漸近的平坦な接続

Euclid 空間 R^4 上の自明な主ファイバー束 $P=R^4\times G$ を考える．このとき，P 上の接続 A は，R^4 上の $\mathfrak{g}$ 値 1-形式 $\sum_{i=1}^{4}A_i(x)dx^i$ とみることができる．

本節では，作用積分 $\frac{1}{2}\int_{R^4}|F(A)|^2dx$ が有限の値をとるような接続を取り扱う．次元が 5 以上の Euclid 空間では，a の値が有限である Yang-Mills-Higgs 場は自明なもの以外に存在しないということがわかっている（系 5.1.5）が，4 次元の場合は事情がちがっている．

作用積分が有限ということだけでは，扱う対象が広すぎるので，漸近的平坦という概念を導入しよう．

接続 A は，$|x|\longrightarrow\infty$ としたとき，曲率のノルム $|F(A)|(x)$ が，$\mathcal{YM}(A)$ の値が有限となるに十分な程度零に減少するとき，**漸近的に平坦**であるという．

ゲージ変換 g を施してもノルムは変わらない，すなわち $|F(g^*(A))|(x)=|F(A)|(x)$ であるから，$A(x)$ とその1階の微分 $\dfrac{\partial A_i}{\partial x^j}(x)$ は，必ずしも十分はやく減少する必要はない．接続 A が漸近的に平坦であるためには，十分大きな半径 R の球 $B_R=\{x\in \boldsymbol{R}^4,\ |x|\leqq R\}$ の外側 $\boldsymbol{R}^4\backslash B_R$ において，ゲージ変換 $g:\boldsymbol{R}^4\backslash B_R\longrightarrow G$ が存在して

$$(g^*(A))(x)=g^{-1}(x)(dg)(x)+g^{-1}(x)A(x)g(x)$$

が，1階の微分までこめて十分はやく零に減衰すればよい．そのことを

$$A(x)\sim g(x)(dg^{-1})(x),\quad |x|\longrightarrow\infty \tag{5.2.1}$$

のように表す．ここで，$\sim$は $A(x)-g(x)(dg^{-1})(x)$ とその1階の偏微分係数が0に近づくことを意味する．ここに登場したゲージ変換 g は，$\boldsymbol{R}^4$ 全体に連続的に拡張できるとは限らない．それは，次のような事情によるのである．

構造群 G を特殊ユニタリ群 $SU(2)$ として話を進める．

g は B_R の境界 $S^3_R=\{x\in\boldsymbol{R}^4;\ |x|=R\}$ において

$$g|_{S^3_R}:S^3_R\longrightarrow SU(2) \tag{5.2.2}$$

という C^∞ 写像を定義するが，$SU(2)$ は S^3 と微分同相（第1章　1.1節）であるから，g が S^3_R の内部まで拡張できるかどうかは，g の写像度 $\deg(g)$ によって決まってしまう．実際に，$\deg(g)=0$ なる g だけが内部にまで拡張できる（第1章　定理1.3.6）のである．さらに写像度が等しい g,g' は一方から他方へ連続的に変形できるので，漸近的平坦な接続全体の集合 $\mathcal{A}^a$ は，可算個の部分集合 $\mathcal{A}^a_q$ $(q\in\boldsymbol{Z})$ の和集合として表される．ここで $\mathcal{A}^a_q$ は，$A\in\mathcal{A}^a$ であって $A\sim g(x)(dg^{-1})(x)$；$\deg(g|_{S^3_R})=q\in\boldsymbol{Z}$ であるものの集合を表し，$q\neq q'$ ならば $\mathcal{A}^a_q\cap\mathcal{A}^a_{q'}=\phi$ である．これにより

$$\mathcal{A}^a=\bigcup_{q\in Z}\mathcal{A}^a_q$$

と書ける．

接続 A の作用積分の値とこの写像度の関係については次の定理がある．

定理 5.2.1 P を $\boldsymbol{R}^4$ 上の $SU(2)$-主ファイバー束とするとき，$A\in\mathcal{A}^a_q$ に対して

$$\mathcal{YM}(A)\geqq\frac{1}{2}\left|\int_{R^4}-\mathrm{Tr}(F(A)\wedge F(A))\right|=4\pi^2|q| \tag{5.2.3}$$

である．

〔証明〕 第4章 (4.2.8) により，$A\in\mathcal{A}_q{}^a$ に対して

$$\mathcal{YM}(A)\geqq\frac{1}{2}\left|\int_{R^4}-\mathrm{Tr}(F(A)\wedge F(A))\right|$$

であるから，右側の等式を証明する．

補題 5.2.2 $F=dA+A\wedge A$ に対して

$$(5.2.4)\qquad -\mathrm{Tr}(F\wedge F)=-d(\mathrm{Tr}(A\wedge F))+\frac{1}{3}d(\mathrm{Tr}A\wedge A\wedge A)$$

である．

〔補題の証明〕

$$\begin{aligned}&F\wedge F\\&=dA\wedge dA+dA\wedge(A\wedge A)+(A\wedge A)\wedge dA+(A\wedge A)\wedge(A\wedge A)\end{aligned}$$

$\mathrm{Tr}A\wedge A\wedge A\wedge A=0$ である (問3) から，$A\wedge A\wedge A=A^3$ とおいて

$$-\mathrm{Tr}(dA\wedge dA)=-d(\mathrm{Tr}A\wedge dA)=-d(\mathrm{Tr}A\wedge F)+d(\mathrm{Tr}A^3)$$

を (5.2.4) に代入すると

$$(5.2.5)\qquad -\mathrm{Tr}F\wedge F=-d(\mathrm{Tr}A\wedge F)+d(\mathrm{Tr}A^3)-2\mathrm{Tr}(dA\wedge A\wedge A)$$

ところが

$$dA^3=dA\wedge A\wedge A-A\wedge dA\wedge A+A\wedge A\wedge dA$$

であるから

$$d(\mathrm{Tr}A^3)=\mathrm{Tr}dA^3=3\mathrm{Tr}(dA\wedge A\wedge A)$$

となる．したがって，(5.2.5) の右辺は

$$-d(\mathrm{Tr}A\wedge F)+\frac{1}{3}d(\mathrm{Tr}A^3)$$

となる．

問 3. $\mathrm{Tr}\ (A\wedge A\wedge A\wedge A)=0$ を示せ．

さて，定理の証明にもどろう．積分値が有限だから

$$(5.2.6)\qquad \lim_{R\to\infty}\int_{B_R}-\mathrm{Tr}F\wedge F=\int_{R^4}-\mathrm{Tr}F\wedge F$$

補題と Stokes の定理 (第1章　定理 1.3.4) を用いると，左辺は

$$\lim_{R\to\infty}\int_{B_R}-\mathrm{Tr}F\wedge F=\lim_{R\to\infty}\int_{S_R^3}\left\{-\mathrm{Tr}(A\wedge F)+\frac{1}{3}\mathrm{Tr}A^3\right\}$$

g^{-1} を改めて f と書くと，θ を $G=SU(2)$ の標準 1-形式として

$$A \sim g(x)(dg^{-1})(x) = f^{-1}(x)(df)(x) = f^*\theta$$

であるから

$$\int_{S_R^3}\left\{-\mathrm{Tr}(A\wedge F)+\frac{1}{3}\mathrm{Tr}A^3\right\} \tag{5.2.7}$$
$$=\frac{1}{3}\int_{S_R^3}\mathrm{Tr}(f^*\theta+g\cdot g^*(A)\cdot g^{-1})^3$$
$$-\int_{S_R^3}\mathrm{Tr}((f^*\theta+g\cdot g^*(A)\cdot g^{-1})\wedge F)$$

極限をとって

$$\int_{R^4}-\mathrm{Tr}F\wedge F=\frac{1}{3}\lim_{R\to\infty}\int_{S_R^3}f^*(\mathrm{Tr}\theta^3)$$

となる．θ は行列に値をもつ 1-形式であるから，外積および θ の定義（第 1 章 (1.10.2)）から

$$(\theta\wedge\theta)(X, Y)=[X, Y], \qquad X, Y\in \mathfrak{su}(2)=T_eG \tag{5.2.8}$$

これから

$$(\mathrm{Tr}\theta\wedge\theta\wedge\theta)(X, Y, Z)=3\mathrm{Tr}(X[Y, Z]), \qquad X, Y, Z\in\mathfrak{su}(2) \tag{5.2.9}$$

が導かれる．

Pauli 行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (5.1 節　例) を用いると，$S^3\ni x$ と $SU(2)\ni g$ が次のように対応する．

$$x=(x^1, x^2, x^3, x^4) \Leftrightarrow g=x^4I_2+\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{3}x^i\sigma_i \tag{5.2.10}$$

また，S^3 上の点 $\mathrm{N}=(0,0,0,1)$ における標準ベクトル場 $\dfrac{\partial}{\partial x^i}(i=1,2,3)$ と $\mathfrak{su}(2)=T_eG$ の基底 $e_i=\sqrt{-1}\,\sigma_i$ $(i=1,2,3)$ が対応する．簡単な計算により

$$\mathrm{Tr}e_1[e_2, e_3]=-\sqrt{-1}\,\mathrm{Tr}\sigma_1[\sigma_2, \sigma_3]=4$$

である．ところが，対応 (5.2.10) により $SU(2)$ を S^3 とみたときの体積要素 $dv=\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$ は，点Nにおいて $dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$ と一致し

$$dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3(e_1, e_2, e_3)=1$$

したがって，S^3 の回転に関して不変な 3-形式 $\mathrm{Tr}\theta^3$ と dv は，$SU(2)$ 上で

$$\mathrm{Tr}\theta^3=12\,dv$$

である．$\deg(g)=q$ であるから $\deg(f)=-q$ であり，写像度の定義から積分

変数の変換ができて

$$\frac{1}{3}\int_{S^3_R} f^*(\mathrm{Tr}\theta^3) = -\frac{q}{3}\int_{SU(2)} \mathrm{Tr}\theta^3 = -\frac{12q}{3}\int_{S^3} dv = -8\pi^2 q$$

これによって，(5.2.3) の右側の等式がえられる．

問 4. (5.2.9) を証明せよ．

注 1. より一般的に，コンパクト単純 Lie 群 G に対しても，命題 5.2.1 と同様な命題が成り立つ．それは，単連結コンパクト単純 Lie 群 G のホモトピー群について

$$\pi_0(G) = \pi_1(G) = \pi_2(G) = 0, \quad \pi_3(G) \cong \boldsymbol{Z}$$

という事実があることに基づいて示される．

4 次元球面 S^4 は，立体射影により $\boldsymbol{R}^4$ に無限遠点 ∞ をつけ加えてコンパクト化したものとみられる．すなわち，$S^4 = \boldsymbol{R}^4 \cup \{\infty\}$ である．$\boldsymbol{R}^4$ 上の漸近的平坦な接続 $A \in \mathcal{A}^a_q$ が，S^4 上の主ファイバー束 P の上にまで拡張できる，すなわち，P 上に接続 $\tilde{A}$ が存在して，$\tilde{A}|_{\boldsymbol{R}^4} = A$ であるとすれば

$$\text{(5.2.11)} \quad 8\pi^2|q| = \left|\int_{\boldsymbol{R}^4} -\mathrm{Tr}F(A)\wedge F(A)\right| = \left|\int_{S^4} -\mathrm{Tr}F(\tilde{A})\wedge F(\tilde{A})\right|$$

となる．第 4 章 4.2 節の議論により，これは束 P の特性数

$$p(P) = -8\pi^2\int_{S^4} c_2(\boldsymbol{E}), \quad \boldsymbol{E} = P\times_\rho \boldsymbol{C}^2$$

に，符号を除いて等しいから，$\int_{S^4} c_2(\boldsymbol{E})$ は符号を除いて写像度 q に一致する．

整数 $-\int_{S^4} c_2(\boldsymbol{E})$ を主ファイバー束 $P = P(S^4, SU(2))$ の**指数**という．負の符号をつけてあるのは，自己双対接続を許容する主ファイバー束の指数が正になるようにするためである．この指数に関して次の命題が成り立つ．

命題 5.2.3 主ファイバー束 $P(S^4, SU(2))$ の同値類の全体と，整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ との間には，対応

$$P \text{ を含む同値類} \longleftrightarrow P \text{ の指数} -\int_{S^4} c_2(\boldsymbol{E})$$

によって，1 対 1 の対応がつけられる．

S^4 上の主ファイバー束 P に対して，変換関数

$$g : U\cap V \longrightarrow SU(2) \quad U = S^4\setminus\{\mathrm{S}\},\ V = S^4\setminus\{\mathrm{N}\}$$

(S, N はそれぞれ S^4 の南極および北極とする) が定まり, g を赤道上に制限すると, g の写像度が定義される.

この写像と次節での議論から命題5.2.3が証明されて, 第2章 定理2.1.7で述べた対応が, これによって具体的に表示されることになる.

注 2. 命題5.2.3における底空間は, S^4 以外の連結コンパクトな, 向きづけられた4次元 C^∞ 多様体 M としてもよい.

定理 5.2.4 P を Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^4$ 上の G-主ファイバー束, A を P 上の作用積分有限な Yang-Mills 接続とする.

このとき, S^4 上の G-主ファイバー束 $\tilde{P}$ とその上の接続 $\tilde{A}$ とが存在して, $A=\tilde{A}|_{\boldsymbol{R}^4}$ である.

この定理は, Euclid 空間 $\boldsymbol{R}^4$ 上の接続が S^4 上の接続に拡張されるための十分条件を与えている ([65] p.24 系 4.6).

Yang-Mills 汎関数は共形的に不変 (第4章) であるから, $\tilde{A}$ も S^4 上の標準計量 h に関する Yang-Mills 接続となっている.

5.3 S^4 または R^4 上のインスタントン

$\boldsymbol{R}^4$ 上の自己双対接続は, 時間的にも空間的にもある1点のまわりにゲージ場が局在しているという状況にちなんで, インスタントンと名づけられたといわれている.

S^4 または $\boldsymbol{R}^4$ 上のインスタントンの具体的表示については, 't Hooft のインスタントン解, Drinfeld-Manin 解, Atiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin の構成法によるインスタントン解など, 種々の自己双対方程式の解がえられている. 本節では, 具体的な表現をもつ S^4 上のインスタントンの一つであるところの, Belavin-Polyakov-Schwartz-Tyupkin のインスタントン解を4元数を用いて構成してみよう.

$\boldsymbol{H}$ を4元数体とする. $\boldsymbol{H}$ の元 $\boldsymbol{x}$ は次のように表される.

$$\boldsymbol{x}=x_1+x_2\boldsymbol{i}+x_3\boldsymbol{j}+x_4\boldsymbol{k}$$

ここに, $x_a \in \boldsymbol{R}$ $\quad 1 \leqq a \leqq 4$

$$i^2=j^2=k^2=-1,\ ij=-ji=k$$
$$jk=-kj=i,\qquad ki=-ik=j$$

$\boldsymbol{H}\ni x$ に対して，共役（な元）$\bar{x}$ を

$$\bar{x}=x_1-x_2i-x_3j-x_4k$$

で定義すると

$$\overline{xy}=\bar{y}\cdot\bar{x}$$

である．また，純虚数 $\mathrm{Im}x$ を

$$\mathrm{Im}x=x_2i+x_3j+x_4k$$

と定義すると

$$\mathrm{Im}\,(xy)=\frac{1}{2}(xy-\bar{y}\bar{x})$$

である．また

$$x\bar{x}=\bar{x}x={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+{x_4}^2=|x|^2$$

$$x\neq 0\quad のとき\quad x^{-1}=\frac{\bar{x}}{|x|^2}$$

などは，複素数の場合と似た形になる．ただし，一般に積は可換でないことに注意しなくてはならない．

$Sp(1)=\{x\in\boldsymbol{H};\ |x|=1\}$ は乗法に関して Lie 群であり，$Sp(1)$ の Lie 代数は

$$\mathrm{Im}\boldsymbol{H}=\{x_2i+x_3j+x_4k\ ;\ x_2,x_3,x_4\in\boldsymbol{R}\}$$
$$[x,y]=\mathrm{Im}\,xy\quad x,y\in\mathrm{Im}\boldsymbol{H}$$

である．

$\boldsymbol{H}$ の元 x は，複素数を用いて

$$x=z_1+z_2j\quad z_1,z_2\in\boldsymbol{C}$$

と表すこともできるので，対応

$$\boldsymbol{H}\ni x=z_1+z_2j\Leftrightarrow(z_1,z_2)\in\boldsymbol{C}^2$$

により，$\boldsymbol{H}$ を $\boldsymbol{C}^2$ とみることができる．そのように見たとき，4元数 g を右から掛ける演算は $\boldsymbol{C}^2$ 上に線形変換をひき起こす．具体的に示せば

$$x=z_1+z_2j,\ g=g_1+g_2j$$

とするとき

$$\boldsymbol{H} \text{ 上の } x \longrightarrow xg \text{ は, } \boldsymbol{C}^2 \text{ 上の } (z_1, z_2) \longmapsto (z_1, z_2)\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ -\bar{g}_2 & \bar{g}_1 \end{pmatrix}$$

をひき起こす．このようにして，$Sp(1)$ と $SU(2)$ とが同型となり，また

$$i \longleftrightarrow \frac{\sqrt{-1}}{2}\sigma_3, \quad j \longleftrightarrow \frac{\sqrt{-1}}{2}\sigma_2, \quad k \longleftrightarrow \frac{\sqrt{-1}}{2}\sigma_1$$

によって，Lie 代数 $\mathfrak{sp}(1)$ と $\mathfrak{su}(2)$ とは Lie 代数として同型となる．

$\boldsymbol{R}^4$ と $\boldsymbol{H}$，$SU(2)$ と $Sp(1)$，$\mathfrak{su}(2)$ と $\mathfrak{sp}(1)=\mathrm{Im}\boldsymbol{H}$ をそれぞれ同一視すると，$\boldsymbol{R}^4$ 上の $SU(2)$-主ファイバー束の接続 A は，$\boldsymbol{H}$ 上の $\mathrm{Im}\boldsymbol{H}$ に値をもつ 1-形式

(5.3.1)
$$A(x)=\sum_{a=1}^{4} A_a(x)dx^a \quad x\in\boldsymbol{R}^4$$
$$A_a(x)\in\mathrm{Im}\boldsymbol{H} \quad 1\leqq a\leqq 4$$

とみることができる．

(5.3.2)
$$dx=dx^1+dx^2i+dx^3j+dx^4k$$
$$d\bar{x}=dx^1-dx^2i-dx^3j-dx^4k$$

を 4 元数微分形式といい，$d\bar{x}$ を dx の共役という．dx も $d\bar{x}$ も $\boldsymbol{R}^4$ 上で定義され $\boldsymbol{H}$ に値をもつ 1-形式である．

C^∞ 関数 $f:\boldsymbol{H}\longrightarrow\boldsymbol{H}$ によるスカラー倍 $f(x)dx$ を

$$\begin{aligned} f(x)dx &= (f_1+f_2 i+f_3 j+f_4 k)(dx^1+dx^2i+dx^3j+dx^4k) \\ &= f_1\,dx^1-f_2\,dx^2-f_3\,dx^3-f_4\,dx^4 \\ &\quad +(f_1\,dx^2+f_2\,dx^1+f_3\,dx^4-f_4\,dx^3)i \\ &\quad +(f_1\,dx^3+f_3\,dx^1-f_2\,dx^4+f_4\,dx^2)j \\ &\quad +(f_1\,dx^4+f_4\,dx^1+f_2\,dx^3-f_3\,dx^2)k \end{aligned}$$

と定義する．これは $\boldsymbol{H}$ 値 1-形式である．このとき

$$A(x)=\mathrm{Im}\{f(x)dx\}=\frac{1}{2}\{f(x)dx-d\bar{x}\bar{f}(x)\}$$

は $\mathrm{Im}\boldsymbol{H}$，すなわち $\mathfrak{su}(2)$ に値をもつから，$\boldsymbol{R}^4$ 上の $SU(2)$-主ファイバー束上の接続を与える．Lie 群 $\boldsymbol{H}^*=\{x\in\boldsymbol{H};\ x\neq 0\}$ の Lie 代数は $\boldsymbol{H}$ 自身なので，$f(x)dx$ は構造群 $\boldsymbol{H}^*$ に対する接続となっていることに注意する．

命題 5.3.1　接続 $A=\mathrm{Im}\{f(x)dx\}$ の曲率 $F(A)$ は

(5.3.3)
$$F(A)=\mathrm{Im}\{df\wedge dx+fdx\wedge fdx\}$$

である．

〔証明〕 $\boldsymbol{H}^*$ の Lie 代数 $\boldsymbol{H}$ は，中心 $\boldsymbol{R}$ と $\mathrm{Im}\boldsymbol{H}$ の，Lie 代数としての直和

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{R}\oplus\mathrm{Im}\boldsymbol{H}$$

で表される．

$$f(x)dx=\mathrm{Re}\,f(x)dx+\mathrm{Im}\,f(x)dx$$

を微分すると

$$d(f(x)dx)=\mathrm{Re}\{df(x)\wedge dx\}+\mathrm{Im}\{df(x)\wedge dx\}$$

となる．一方

$$f(x)dx=\sum_{t=1}^{4}a_t dx^t$$

$$a_t=b_t+c_t,\quad b_t\in\boldsymbol{R},\quad c_t\in\mathrm{Im}\boldsymbol{H},\quad 1\leqq t\leqq 4$$

とおくと

$$\begin{aligned}f(x)dx\wedge f(x)dx&=\sum_{s,t}a_s dx^s\wedge a_t dx^t=\sum a_s a_t dx^s\wedge dx^t\\&=\frac{1}{2}\sum(a_s a_t-a_t a_s)dx^s\wedge dx^t\\&=\frac{1}{2}\sum(c_s c_t-c_t c_s)dx^s\wedge dx^t\\&=\sum_{s,t}[\mathrm{Im}a_s,\mathrm{Im}a_t]dx^s\wedge dx^t\\&=\mathrm{Im}\{f(x)dx\wedge f(x)dx\}\end{aligned}$$

すなわち

$$f(x)dx\wedge f(x)dx=A\wedge A$$

となり，命題の結果がえられる．

$\boldsymbol{R}^4$ の Euclid 計量に関する正規直交基底から成るフレーム $\{1,i,j,k\}$ によって，$\boldsymbol{R}^4$ の向きを定めると，次の命題が成り立つ．

命題 5.3.2 $\boldsymbol{H}$ 値 2-形式 $dx\wedge d\bar{x}$ は自己双対的形式を定め，$d\bar{x}\wedge dx$ は反自己双対的形式を定める．

問 5. 命題 5.3.2 を証明せよ．［純然たる計算である．］

問 6. $x\in\boldsymbol{R}^4$ と $(z^1,z^2)\in\boldsymbol{C}^2$ を次のように対応させることによって，$\boldsymbol{R}^4$ と $\boldsymbol{C}^2$ を同一視することができる．

$$x=(x^1,x^2,x^3,x^4)\longleftrightarrow(z^1,z^2)\;;\;z^1=x^1+ix^2,\quad z^2=x^3+ix^4$$

また，C^2 上の C 値 1-形式 dz^1, dz^2 およびその共役 $d\bar{z}^1, d\bar{z}^2$ を次のように定義する．

$$dz^1=dx^1+idx^2,\quad dz^2=dx^3+idx^4$$
$$d\bar{z}^1=dx^1-idx^2,\quad d\bar{z}^2=dx^3-idx^4$$

$(x^1, x^2, x^3, x^4)\in R^4$ は，この順序によって R^4 の向きを定めているものとして，次のことを証明せよ．

$$dz^1\wedge dz^2+d\bar{z}^1\wedge d\bar{z}^2,\quad \sqrt{-1}\,(dz^1\wedge dz^2-d\bar{z}^1\wedge d\bar{z}^2)$$
$$\sqrt{-1}\,(dz^1\wedge d\bar{z}^1+dz^2\wedge d\bar{z}^2)$$

は自己双対 2-形式の空間 $\Lambda^2_+(R^4)$ の基底となり

$$\sqrt{-1}\,(dz^1\wedge d\bar{z}^1-dz^2\wedge d\bar{z}^2),\quad \sqrt{-1}\,(dz^1\wedge d\bar{z}^2+dz^2\wedge d\bar{z}^1)$$
$$dz^1\wedge d\bar{z}^2-dz^2\wedge d\bar{z}^1$$

は反自己双対 2-形式の空間 $\Lambda^2_-(R^4)$ の基底となる．

定義 5.3.3 R^4 上の，構造群が $SU(2)$ のときの接続

(5.3.4) $$A(x)=\mathrm{Im}\left\{\frac{\bar{x}dx}{1+|x|^2}\right\}$$

を，**Belavin-Polyakov-Schwartz-Tyupkin の反インスタントン** または，略して **BPST-反インスタントン**という．

BPST-反インスタントン $A(x)$ について $F(A)$ を計算してみよう．

$f(x)=\dfrac{\bar{x}}{1+|x|^2}$ とおくと

$$df=\frac{d\bar{x}}{1+|x|^2}-\frac{\bar{x}d(1+|x|^2)}{(1+|x|^2)^2}$$
$$df\wedge dx=\frac{d\bar{x}\wedge dx}{1+|x|^2}-\frac{\bar{x}d(1+|x|^2)\wedge dx}{(1+|x|^2)^2}$$

ここで，$d(|x|^2)=dx\cdot\bar{x}+x\cdot d\bar{x}$ であるから

$$df\wedge dx=\frac{d\bar{x}\wedge dx}{1+|x|^2}-\frac{\bar{x}\cdot dx\cdot\bar{x}\wedge dx}{(1+|x|^2)^2}-\frac{|x|^2d\bar{x}\wedge dx}{(1+|x|^2)^2}$$

一方，$fdx\wedge fdx=\dfrac{\bar{x}dx\wedge\bar{x}dx}{(1+|x|^2)^2}$ であるから

$$df\wedge dx+fdx\wedge fdx=\frac{d\bar{x}\wedge dx}{(1+|x|^2)^2}$$

命題 5.3.1 により，

(5.3.5) $$F(A)(x)=\frac{d\bar{x}\wedge dx}{(1+|x|^2)^2}$$

よって，命題5.3.2により，次の結果がえられる．

命題 5.3.4 $A(x)=\mathrm{Im}\left\{\dfrac{\bar{x}dx}{1+|x|^2}\right\}$は反自己双対接続である．

問 7. BPST–反インスタントンが既約であることを，原点$0\in \boldsymbol{R}^4$での曲率$F(A)$の値を求め，第3章3.5節注（ホロノミー群に関する命題）を用いて証明せよ．

問 8. $\mathfrak{su}(2)$ 値 1–形式 $\mathrm{Im}\left\{\dfrac{xd\bar{x}}{1+|x|^2}\right\}$ が，自己双対的であること示せ．

これを **BPST–インスタントン**という．

注 3. (i) BPST–反インスタントン$A(x)=\mathrm{Im}\left\{\dfrac{\bar{x}dx}{1+|x|^2}\right\}$は$\mathcal{A}_{-1}{}^{a}$に属する漸近的平坦な接続である．実際

$$g: \boldsymbol{H}\backslash 0 \longrightarrow Sp(1);\ x\longmapsto \frac{\bar{x}}{|x|}$$

を用いると，$A(x)\sim g(x)dg^{-1}(x)$ となり，写像

$$g|_{S_R^3}: S_R^3 \longrightarrow Sp(1)\approx S^3$$

の写像度は -1 である．

(ii) スケール変換 $\lambda: \boldsymbol{H}\longrightarrow \boldsymbol{H};\ x\longmapsto \dfrac{x}{\lambda}$ $(\lambda>0)$ に対して

$$A_\lambda(x)=(\lambda^*A)(x)=\mathrm{Im}\left\{\frac{\bar{x}dx}{\lambda^2+|x|^2}\right\}$$

も反自己双対的である（第4章4.2節 問4）．

曲率の空間的密度を表す密度関数$|F(A_\lambda)|^2=\dfrac{\lambda^4}{(\lambda^2+|x|^2)^4}$はスケール$\lambda$を0に近づけると，Diracのデルタ関数$\delta$に近づいていく．

(iii) $x_0\in \boldsymbol{R}^4$と$\lambda>0$を固定したとき

$$(5.3.6)\quad A_{(\lambda\, x_0)}(x)=\mathrm{Im}\left\{\frac{\overline{(x-x_0)}dx}{\lambda^2+|x-x_0|^2}\right\}$$

も，$\mathcal{A}_{-1}^{a}$に属する反自己双対接続である．λをゲージ場Aの強さ，x_0をその中心という．パラメータ (λ, x_0) の自由度は$1+4=5$である．

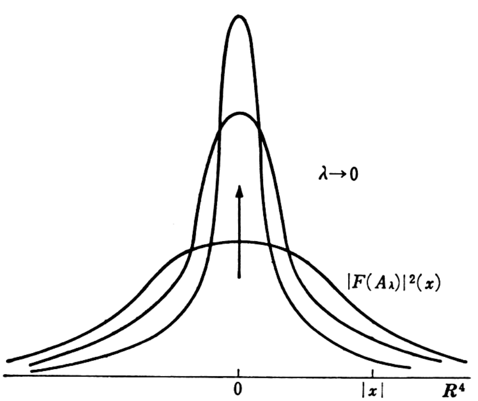


図 5.2 $|F(A_\lambda)|^2$のグラフ

命題 5.3.5 BPST-反インスタントン $A(x)$ には次の性質がある．

(i) A は指数ゲージ的である．すなわち

$$A\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)=0$$

(ii) A は Coulomb ゲージ的である．すなわち

$$\operatorname{div} A=\sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x^i}=0$$

(iii) $\boldsymbol{R}^4$ の回転

$$L_a : \boldsymbol{H} \longrightarrow \boldsymbol{H};\quad x \longmapsto ax,\quad a \in Sp(1)$$

に関して，A は不変である．すなわち

$$L_a^* A=A$$

(iv) 任意の $\mathfrak{su}(2)$ 値関数 $\phi : \boldsymbol{H} \longrightarrow \mathfrak{su}(2)$ に対して

$$\sum_t [A_t,[A_t,\phi]]=-2\frac{|x|^2}{(1+|x|^2)^2}\phi \quad \left(A=\sum_t A_t\,dx^t\right) \tag{5.3.7}$$

である．

〔証明〕 単純な計算なので，読者の演習問題とする．

$\boldsymbol{R}^4$ 上の BPST-反インスタントンは，S^4 上の指数が -1 である $SU(2)$-主ファイバー束における反自己双対接続に拡張される．S^4 は 1 次元の 4 元数射影空間 $P^1(\boldsymbol{H})$ にほかならないから，$P^1(\boldsymbol{H})$ 上の $SU(2)$-主ファイバー束 P を構成しよう．

$\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{H}-\{(0,0)\}$ の二つの元 $(x,y),(x',y')$ は

$$x'=xq,\quad y'=yq \quad (q\in \boldsymbol{H}\backslash 0)$$

であるとき同値：$(x,y)\sim(x',y')$ であるとして，この同値関係による商空間が $P^1(\boldsymbol{H})$ である（第 1 章 1.1 節）．

$P^1(\boldsymbol{H})$ は，二つの座標近傍

$$U_1=\{[(x,y)];\ x\neq 0\},\quad U_2=\{[(x,y)];\ y\neq 0\}$$

で覆われ，写像 x, y を

$$y : U_1 \longrightarrow \boldsymbol{H};\quad [(x',y')] \longmapsto y'/x'$$

$$x : U_2 \longrightarrow \boldsymbol{H};\quad [(x',y')] \longmapsto x'/y'$$

で定義すると，(U_1, y)，(U_2, x) が $P^1(\boldsymbol{H})$ の可微分構造を定め，x と y の間には

$$y = x^{-1} = \frac{\bar{x}}{|x|^2}$$

という関係がある．

$P^1(\boldsymbol{H})$ 上の主ファイバー束 P を次の変換関数で定義する．

(5.3.8)　　$$f : U_1 \cap U_2 \longrightarrow Sp(1) = SU(2)\ ;\ x \longmapsto \frac{\bar{x}}{|x|}\ \ (= |x| x^{-1})$$

このとき，$\boldsymbol{H}$ 上の反インスタントン

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\bar{x}dx}{1+|x|^2}\right\},\ \mathrm{Im}\left\{\frac{\bar{y}dy}{1+|y|^2}\right\}$$

どうしは，変換関数 f によって，コサイクル条件

(5.3.9)　　$$f^{-1}df + f^{-1}\mathrm{Im}\left\{\frac{\bar{x}dx}{1+|x|^2}\right\} f = \mathrm{Im}\left\{\frac{\bar{y}dy}{1+|y|^2}\right\}$$

をみたす．第1章　1.4節，例17によって，S^4 上の標準計量は，Euclid 計量に共形的であるから，これらは指数 -1 の $SU(2)$-主ファイバー束 P 上の反自己双対接続 A を定めている．

問 9.　(i)　BPST-反インスタントン $A(x)$ に，直接 $x = y^{-1}$ を代入すると，A は

(5.3.10)　　$$A = -\mathrm{Im}\left\{\frac{dy \cdot y^{-1}}{1+|y|^2}\right\} \qquad (y=0 \text{ は } A \text{ の特異点})$$

となることを示せ．

(ii)　$y=0$ の近傍で，(5.3.10) にゲージ変換

$$f : \boldsymbol{H} \backslash 0 \longrightarrow SU(2)\ ;\ y \longrightarrow \frac{\bar{y}}{|y|}$$

を施せば，$f^*(A) = f^{-1}df + f^{-1}Af$ は $y=0$ で特異点をもたなくなることを示せ．

第6章　楕円複体とモジュライ空間

6.1　楕円複体と自己双対接続の変形

本章では，(M, h) を向きづけられた，コンパクトで連結な4次元 Riemann 多様体とし，G–主ファイバー束 $P=P(M, G)$ の構造群 G は，特殊ユニタリ群 $SU(r)$ と仮定する．

P 上の自己双対接続全体の集合を $\mathcal{A}_P^+$ で表す．ゲージ変換群 $\mathcal{G}_P$ は $\mathcal{A}_P^+$ を不変にするから，ゲージ変換で互いに移り合う自己双対接続を同一視することによって，$\mathcal{A}_P^+$ の商空間

$$\mathcal{M}_P^+=\mathcal{A}_P^+/\mathcal{G}_P$$

が定義される．この $\mathcal{M}_P^+$ を，P 上の自己双対接続の**モジュライ空間**という．本章は $\mathcal{M}_P^+$ の局所的考察を行うのが目的である．

G が一般のコンパクト半単純 Lie 群の場合にも，$SU(r)$ のときとほぼ同様の議論ができる．

定理 6.1.1　A を P 上の自己双対接続とする．直交射影

$$p^- : \Lambda^2(M) \longrightarrow \Lambda^2_-$$

を用いて，d_A^- を次のように定義する．

$$d_A^-=p^-\circ d_A$$

このとき，系列

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\mathfrak{g}_P) \xrightarrow{d_A=D_A} \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \xrightarrow{d_A^-} \Omega^2_-(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow 0 \tag{6.1.1}$$

には，次の二つの性質がある．

(i)　$d_A^-\circ d_A=0$

(ii)　任意の点 $x\in M$ と，零でないすべての $\xi\in T_x^*M$ に対して，x 上のファイバーからなる (6.1.1) の**表象系列**

$$(6.1.2)\qquad 0 \longrightarrow (\mathfrak{g}_P)_x \xrightarrow{\sigma(d_A)_\xi} (\mathfrak{g}_P)_x \otimes \Lambda^1_x \xrightarrow{\sigma(d_A^-)_\xi} (\mathfrak{g}_P)_x \otimes \Lambda^2_{-x} \longrightarrow 0$$

は完全系列である．すなわち

$$\mathrm{Im}\sigma(d_A)_\xi = \mathrm{Ker}\,\sigma(d_A^-)_\xi$$

が成り立つ．

この定理の証明に入るまえに，いくつかの用語の定義を述べておく．

定理の中の性質（i），(ii）をみたす系列（6.1.1）を，**楕円複体**という．楕円複体の典型的例は de-Rham 複体である（第1章（1.2.14））．

$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ が M 上のベクトル束のとき，線形微分作用素

$$\mathscr{D} : \Gamma(M;\boldsymbol{E}) \longrightarrow \Gamma(M;\boldsymbol{F})$$

に対して，その表象 $\sigma(\mathscr{D})_\xi$ の一般的定義を述べよう．$C^\infty(U,E)$ を $\boldsymbol{R}^n$ の開集合 U からベクトル空間 E への C^∞ 写像 f 全体のなすベクトル空間とする．F もベクトル空間として，線形写像 $D : C^\infty(U,E) \longrightarrow C^\infty(U,F)$ に対し

$$(6.1.3)\qquad Df = \sum_{|t|\leq r} g_t \cdot D^t f$$

をみたす $g_t \in C^\infty(U, \mathrm{Hom}(E,F))$ が存在するとき，D は r 階の**線形微分作用素**という．ここに，$t=(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ は n 個の非負の整数の組であり，$|t|$，D^t はそれぞれ

$$|t| = t_1 + \cdots + t_n,\quad D^t = \partial^{|t|}/\partial x_1^{t_1} \cdots \partial x_n^{t_n}$$

を表す．各点 $x \in U$ と，その点での $\xi = \sum \xi_i dx^i \in T_x^* \boldsymbol{R}^n$ に対して，線形写像 $\sigma(D)_\xi : E \longrightarrow F$ を

$$(6.1.4)\qquad \sigma(D)_\xi = \sum_{|t|=r} g_t(x) \xi_1^{t_1} \cdots \xi_n^{t_n}$$

で定め，$\sigma(D)_\xi$ を D の**表象**という．

すべての $x \in U$ と，0 でないすべての $\xi \in T_x^* \boldsymbol{R}^n$ に対して，$\sigma(D)_\xi$ が同形写像となるとき，D は**楕円型**であるという．

次に $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ を M 上のベクトル束とする．線形写像

$$\mathscr{D} : \Gamma(M;\boldsymbol{E}) \longrightarrow \Gamma(M;\boldsymbol{F})$$

が r 階の**微分作用素**であるとは，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{F}$ 共通に，局所自明近傍 $U, V, \cdots$ による底空間 M の開被覆がとれて，各 U 上で $\boldsymbol{E}$ を $U \times E$, $\boldsymbol{F}$ を $U \times F$ と同一視したとき，$\mathscr{D}$ が r 階の微分作用素

$$D_U : C^\infty(U,E) \longrightarrow C^\infty(U,F)$$

で与えられるということである．この場合も，$x\in U\subset M$ と 0 でない $\xi\in T_x^*M$ における線形写像 $\sigma(\mathcal{D})_\xi$ を $\sigma(D_U)_\xi$ で定義し，これを $\mathcal{D}$ の**表象**という．そして，D_U が楕円型のとき $\mathcal{D}$ は**楕円型**であるという．

(6.1.1) にあらわれる 1 階の微分作用素 d_A, d_A^- に対しては，表象が次の式で与えられる．

(6.1.5) $$\sigma(d_A)_\xi : (\mathfrak{g}_P)_x \longrightarrow (\mathfrak{g}_P)_x\otimes\Lambda_x^1;\quad \phi\longmapsto\phi\otimes\xi$$

(6.1.6) $$\sigma(d_A^-)_\xi : (\mathfrak{g}_P)_x\otimes\Lambda_x^1 \longrightarrow (\mathfrak{g}_P)_x\otimes\Lambda_{-,x}^2$$
$$\phi\otimes\eta\longmapsto\phi\otimes(\xi\wedge\eta)_-$$

ここに，$(\xi\wedge\eta)_-=p^-(\xi\wedge\eta)$ は，$\xi\wedge\eta$ の反自己双対部分を表す（[19] 付録 1. §25, [32] 第 1 章）．

〔定理 6.1.1 の証明〕

(i) A は自己双対的であるから $F_-=0$ である．Ricci の公式により，すべての $\Phi\in\Omega^0(\mathfrak{g}_P)$ に対して

$$d_A^-(d_A\Phi)=p^-(d_Ad_A\Phi)=p^-[F(A),\Phi]=[F_-,\Phi]=0$$

(ii) $(\mathfrak{g}_P)_x\otimes\Lambda_x^1\ni\psi=\sum_{i,a}\psi_i^a E_a dx^i$ に対して

$$\sigma(d_A^-)_\xi\psi=\sum_a E_a\cdot(\xi\wedge\sum_i\psi_i^a dx^i)_-=0$$

であるとすると，E_a は $\mathfrak{g}$ の基底であるから

$$(\xi\wedge\sum_i\psi_i^a dx^i)_-=0,\quad 1\leqq a\leqq l=\dim\mathfrak{g}$$

$\xi\neq0$ であるから，T_x^*M の正規直交基底から成るフレーム $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ であって，向きが M の向きと一致し，$\xi=\xi_1e_1$ ($\xi_1\in\boldsymbol{R}$, $\xi_1\neq0$) となるものが存在する．そこで，$\eta^a=\sum_i\psi_i^a dx^i=\sum_j\eta_je^j$ とおくと

$$(\xi\wedge\eta^a)_-=\frac{1}{2}\{(\xi\wedge\eta^a)-*(\xi\wedge\eta^a)\}$$
$$=\frac{1}{2}\{\xi_1\eta_2(e_1\wedge e_2-e_3\wedge e_4)+\xi_1\eta_3(e_1\wedge e_3+e_2\wedge e_4)$$
$$+\xi_1\eta_4(e_1\wedge e_4-e_2\wedge e_3)\}$$

が導かれ，$(\xi\wedge\eta^a)_-=0$ であるから $\eta_2=\eta_3=\eta_4=0$，すなわち，$\eta^a=\eta_1e^1$ は ξ に比例する．よって

$$\sum_i \psi_i^a dx^i=\psi^a\xi,\quad \psi^a\in\boldsymbol{R},\quad 1\leqq a\leqq l$$

ゆえに

$$\psi=\sum\psi_i^a E_a dx^i=\sum\psi^a E_a\cdot\xi=\sigma(d_A)_\xi\ \left(\sum\psi^a E_a\right)$$

すなわち

$$\mathrm{Ker}\,\sigma(d_A^-)_\xi\subset\mathrm{Im}\sigma(d_A)_\xi$$

もちろん

$$\mathrm{Ker}\,\sigma(d_A^-)_\xi\supset\mathrm{Im}\sigma(d_A)_\xi$$

であるから，(ii) の結論がえられる．

r 階の微分作用素 $\mathcal{D}:\Gamma(M;\boldsymbol{E})\longrightarrow\Gamma(M;\boldsymbol{F})$ に対して，r 階の微分作用素 $\mathcal{D}^*:\Gamma(M;\boldsymbol{F})\longrightarrow\Gamma(M;\boldsymbol{E})$ が次の (6.1.7) をみたすとき，$\mathcal{D}^*$ は $\mathcal{D}$ の**形式的随伴作用素**であるという：

$$\int_M(\mathcal{D}\phi,\psi)_{\boldsymbol{F}}\,dv=\int_M(\phi,\mathcal{D}^*\psi)_{\boldsymbol{E}}\,dv \tag{6.1.7}$$

ここに，$\phi\in\Gamma(M;\boldsymbol{E})$，$\psi\in\Gamma(M;\boldsymbol{F})$ であって，$(\cdot,\cdot)_{\boldsymbol{E}}$, $(\cdot,\cdot)_{\boldsymbol{F}}$はそれぞれ $\boldsymbol{E},\boldsymbol{F}$ のファイバー計量である．

表象 $\sigma(\mathcal{D}^*)$ は $\sigma(\mathcal{D})$ の随伴 $(\sigma(\mathcal{D}))^*$ に一致する．

楕円複体 (6.1.1) に対しては，**Laplace 作用素**とよばれる，自己随伴2階楕円型微分作用素

$$\begin{aligned}
\Delta_A^0&=\delta_A\circ d_A(=d_A^*\circ d_A) &&:\Omega^0(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow\Omega^0(\mathfrak{g}_P)\\
\Delta_A^1&=d_A\circ d_A^*+(d_A^-)^*\circ d_A^- &&:\Omega^1(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow\Omega^1(\mathfrak{g}_P)\\
\Delta_{A,-}^2&=d_A^-\circ(d_A^-)^* &&:\Omega_-^2(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow\Omega_-^2(\mathfrak{g}_P)
\end{aligned} \tag{6.1.8}$$

が定義される．

$$\boldsymbol{H}_A^0=\mathrm{Ker}\,\Delta_A^0,\quad \boldsymbol{H}_A^1=\mathrm{Ker}\,\Delta_A^1,\quad \boldsymbol{H}_{A,-}^2=\mathrm{Ker}\,\Delta_{A,-}^2$$

とおくと，楕円型微分作用素の一般論により各 $\boldsymbol{H}_A^i$ は有限次元である．

また，楕円複体の一般論により，$\boldsymbol{H}_A^0,\boldsymbol{H}_A^1,\boldsymbol{H}_{A,-}^2$ はそれぞれ0次，1次，2次のコホモロジー群

$$\begin{aligned}
H_A^0&=\{\Phi\in\Omega^0(\mathfrak{g}_P);\,d_A\Phi=0\}\\
H_A^1&=\{\Phi\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P);\,d_A^-\Phi=0\}/\{d_A\Psi;\,\Psi\in\Omega^0(\mathfrak{g}_P)\}\\
H_{A,-}^2&=\Omega_-^2(\mathfrak{g}_P)/\{d_A^-\Psi;\,\Psi\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)\}
\end{aligned}$$

と線形同形であることが知られている．

$\boldsymbol{H}_A^i$ の次元 h_i $(i=0,1,2)$ に対し，交代和 $h^0-h^1+h^2$ を楕円複体 (6.1.1) の**指数**という．

定理 6.1.2 自己双対接続 A からひき起こされた楕円複体 (6.1.1) の指数は，複素化された随伴束 $\mathfrak{g}_P^{\mathbf{C}}$ の1次 Pontrjagin 類 $p_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbf{C}})$ $(\in H^4(M;\boldsymbol{R}))$，$M$ の Euler 標数 $\chi(M)$，および M の Hirzebruch 符号数 $\tau(M)$ を用いて，次のように表される．

$$h^0-h^1+h^2=-\int_M p_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbf{C}})+\frac{1}{2}\dim G(\chi(M)-\tau(M)) \tag{6.1.9}$$

〔**証明**〕 楕円複体の指数についての Atiyah–Singer の指数定理が用いられる（[29] 第1章 p. 17 参照）．

(6.1.9) の右辺の各項は，P の自己双対接続には直接関係のない，P と M の位相不変量である．

$$M=S^4,\ G=SU(2) \text{ の場合には，} \chi(M)=2,\ \tau(M)=0$$

で，自己双対接続に関する楕円複体の指数は

$$h^0-h^1+h^2=-8k+3$$

ここに

$$k=-\int_{S^4} c_2(E)\ ;\ E=P\times_\rho \boldsymbol{C}^2$$

である．

反自己双対接続 A に対しても，(6.1.1) と同様に，楕円複体

$$0\longrightarrow \Omega^0(\mathfrak{g}_P)\xrightarrow{d_A}\Omega^1(\mathfrak{g}_P)\xrightarrow{d_A^+}\Omega_+^2(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow 0 \tag{6.1.10}$$

が定義され，その指数は次の式で与えられる．

$$h^0-h^1+h^2=\int_M p_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbf{C}})+\frac{1}{2}\dim G(\chi(M)+\tau(M)) \tag{6.1.11}$$

第2章 定理 2.1.7 では，コンパクト，単連結，単純 Lie 群 G に対して，G-主ファイバー束 P の指数 k が定義されているが，楕円複体の指数公式にあらわれる $\int_M p_1(\mathfrak{g}_P^{\mathbf{C}})$ は，P の指数 k を用いて表すことができるのである（[36] p. 454，表 8.1）．

さて，A を主ファイバー束 P 上の自己双対接続とすると，曲率 $F(A)$ については $F(A)_-=0$ である．接続 A の近くに他の自己双対接続があるとし，それを

$$A+\alpha,\ \ \alpha\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$$

とすると

$$F(A+\alpha)=F(A)+d_A\alpha+\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]$$

であるから，$F(A+\alpha)_-=0$ は次の式と同値である．

$$d_A^-\alpha+\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]_-=0,\ \ [\alpha\wedge\alpha]_-=p^-([\alpha\wedge\alpha]) \tag{6.1.12}$$

この方程式は α について非線形である．

ここで，**倉西の写像**とよばれる写像

$$\begin{aligned}&\Xi_A: \Omega^1(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow\Omega^1(\mathfrak{g}_P)\\&\Xi(\alpha)=\alpha+(d_A^-)^*G_A\left(\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]_-\right)\end{aligned} \tag{6.1.13}$$

を考える．G_A は Laplace 作用素 $\Delta_{A,-}^2$ の **Green 作用素**とよばれ $\Omega_-^2(\mathfrak{g}_P)$ から $\mathrm{Im}\Delta_{A,-}^2$ への線形作用素で，次の (6.1.14) をみたすものである．

$$\begin{aligned}&G_A\circ\Delta_{A,-}^2(\Phi)+\mathcal{H}_A(\Phi)=\Phi,\ \ \Phi\in\Omega_-^2(\mathfrak{g}_P)\\&\mathcal{H}_A: \Omega_-^2(\mathfrak{g}_P)\longrightarrow \boldsymbol{H}_{A,-}^2\ \text{（自然な射影）}\end{aligned} \tag{6.1.14}$$

なお，G_A は

$$G_A\circ\Delta_{A,-}^2=\Delta_{A,-}^2\circ G_A$$

をみたすことが知られている．

命題 6.1.3 $\alpha\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ が (6.1.12) をみたすための必要十分条件は

$$d_A^-(\Xi_A(\alpha))=0,\ \ \mathcal{H}_A([\alpha\wedge\alpha]_-)=0 \tag{6.1.15}$$

である．

〔証明〕 α が (6.1.12) をみたすとすると

$$\begin{aligned}d_A^-(\Xi(\alpha))&=d_A^-\alpha+\Delta_{A,-}^2G_A\left(\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]_-\right)\\&=d_A^-\alpha+G_A\Delta_{A,-}^2\left(\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]_-\right)\\&=d_A^-\alpha+\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]_--\mathcal{H}_A\left(\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]_-\right)\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\mathcal{H}_A([\alpha\wedge\alpha]_-)$$

すなわち

(6.1.16) $$d_A^-(\Xi(\alpha)) = -\frac{1}{2}\mathcal{H}_A([\alpha\wedge\alpha]_-)$$

$H_{A,-}^2$ の定義により，右辺は $\mathrm{Ker}(d_A^-)^*$ に含まれるから

$$(d_A^-)^* d_A^-(\Xi(\alpha)) = 0$$

また

$$\|d_A^-\Xi(\alpha)\|^2 = \langle (d_A^-)^* d_A^-(\Xi(\alpha)),\ \Xi(\alpha)\rangle$$

であるから

$$d_A^-(\Xi(\alpha)) = 0 \quad \text{かつ} \quad \mathcal{H}_A([\alpha\wedge\alpha]_-) = 0$$

である．

反対に，(6.1.15) を仮定すると，(6.1.13) により

$$\begin{aligned} 0 = d_A^-\Xi(\alpha) &= d_A^-\alpha + \Delta_{A,-}^2 G_A\left(\frac{1}{2}\ [\alpha\wedge\alpha]_-\right) \\ &= d_A^-\alpha + \frac{1}{2}\ [\alpha\wedge\alpha]_- - \frac{1}{2}\ \mathcal{H}_A([\alpha\wedge\alpha]_-) \\ &= d_A^-\alpha + \frac{1}{2}\ [\alpha\wedge\alpha]_- \end{aligned}$$

これで，(6.1.12) が導かれた．

注 1. Green 作用素，したがって，写像 Ξ_A の定義は，正確には $\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ を Sobolev の L_p^2- ノルム $|\cdot|_p$ で完備化した Hilbert 空間上で行わなくてはならない．

問 1. A を主ファイバー束 P 上の接続とする．$\Phi\in\Omega_-^2(\mathfrak{g}_P)$ に関する非線形 2 階楕円型方程式

(6.1.17) $$d_A^-(d_A^-)^*\Phi + \frac{1}{2}\ [(d_A^-)^*\Phi\wedge(d_A^-)^*\Phi]_- = -F(A)_-$$

が，解 Ψ をもてば，$A+(d_A^-)^*\Psi$ は自己双対接続であることを示せ．

A を主ファイバー束 P 上の自己双対接続とする．P 上の自己双対接続全体から成る集合 $\mathcal{A}_P^+$ は，(6.1.12) を用いると次のように表すことができる．

(6.1.18) $$\mathcal{A}_P^+ = \left\{A+\alpha\,;\,\alpha\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P),\ d_A^-\alpha + \frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]_- = 0\right\}$$

写像 Ξ_A を用いれば，命題6.1.3により $\mathcal{A}_P^+$ はまた，次のように特徴づけられる．

(6.1.19)　$\mathcal{A}_P^+=\{A+\alpha\,;\alpha\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P),\ d_A^-(\Xi_A(\alpha))=0,\ \mathcal{H}_A([\alpha\wedge\alpha]_-)=0\}$

さらに，なんらかの条件によって，A が $H_{A,-}^2=0$ をみたしたとすると

(6.1.20)　$\mathcal{A}_P^+=\{A+\alpha\,;\ \alpha\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P),\ d_A^-(\Xi_A(\alpha))=0\}$

と表現される．

6.2　接続の空間 $\mathcal{B}_P$ と接続の既約性

自己双対接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}_P^+$ は，$\mathcal{A}_P^+$ でゲージ変換で互いに移り合う接続を同一視することによってえられた．$\mathcal{M}_P^+$ は接続の空間 $\mathcal{B}_P=\mathcal{A}_P/\mathcal{G}_P$ の部分集合であり，ゲージ変換による接続の軌道が，$\mathcal{B}_P$ の一つ一つの元とみなされる．軌道のたばに対して，一つの軌道には一つ，しかもただ一つの座標が対応するように，座標を入れることを考えてみよう．

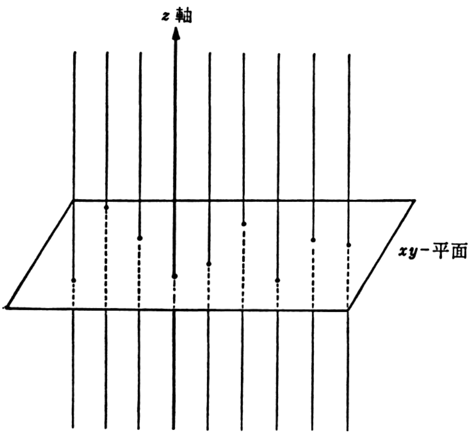


図 6.1　z 軸に平行な直線群

$\boldsymbol{R}^3$ 内の z 軸に平行な直線全体に対し，その座標となりうるパラメータを入れるには，適当な平面，たとえば xy 平面でこれら直線のたばを切断して，その切り口の xy 座標を，切断された直線に対する座標とすればよい．このことを参考にしよう．

$A\in\mathcal{A}_P$ を通るゲージ変換の軌道の接ベクトル空間は

$$\mathrm{Im}\,d_A=\{d_A\Phi\,;\Phi\in\Omega^0(\mathfrak{g}_P)\}$$

である．$\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ の内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して $\mathrm{Im}\,d_A$ と直交する部分空間は

$$\mathrm{Ker}\,\delta_A=\mathrm{Ker}\,d_A^*=\{\alpha\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)\,;\ d_A^*\alpha=0\}$$

であるから

$$\Omega^1(\mathfrak{g}_P)=\mathrm{Im}\,d_A\oplus\mathrm{Ker}\,d_A^*\ \text{(直和)}$$

となる（第4章　命題 4.3.1）．ここで，$S_A=\mathrm{Ker}\, d_A^*$ を，接続 A における**スライス**という．

A が既約な接続（第3章　定義3.5.5）の場合には，次の命題が成り立つ．

命題 6.2.1 A を主ファイバー束 P 上の既約な接続とすると，$\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ の 0 の近傍

$$U=\{\alpha\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)\,;\ |\alpha|_p<\varepsilon\}$$

および，$\Omega^0(\mathfrak{g}_P)$ の 0 の近傍

$$W=\{\Phi\in\Omega^0(\mathfrak{g}_P)\,;\ |\Phi|_{p+1}<\varepsilon'\}$$

が存在して，任意の $\beta\in U$ に対して，次の (6.2.1) をみたす $\Phi\in W$ が一意的に定まる：

(6.2.1) $$d_A^*((\exp\Phi)^*(A+\beta)-A)=0$$

すなわち

$$(\exp\Phi)^*(A+\beta)-A\in S_A$$

ここに，p は $n=\dim M$ に比べて十分大きい自然数である．

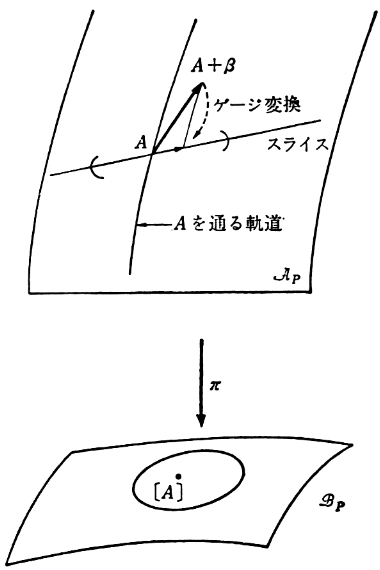


図 6.2 $\pi:\mathcal{A}_P\to\mathcal{B}_P$

接続全体から成る集合 $\mathcal{A}_P$ は $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ をベクトル空間とするアファイン空間であるから，$\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ 上の L_p^2-ノルムによる位相によって，$\mathcal{A}_P$ には自然に位相が定義される．また，自然な射影

$$\mathcal{A}_P\longrightarrow\mathcal{B}_P\,;\ A\longmapsto[A]$$

を用いて，$\mathcal{B}_P$ には商空間の位相が定義できる．すなわち，$V\subset\mathcal{A}_P$ が開集合であるとは，A_0 を固定した接続として

$$\{A-A_0\,;\ A\in V\}\subset\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$$

が L_p^2-ノルムに関して開集合であるときをいい，$U\subset\mathcal{B}_P$ は，$\pi^{-1}(U)$ が $\mathcal{A}_P$ 内で開集合であるとき，$\mathcal{B}_P$ で開集合であると定義する．

命題 6.2.2 $A\in\mathcal{A}_P$ を既約な接続とする．このとき，$\varepsilon>0$ が存在して

$$\pi|_{S_A}: S_{A,\varepsilon}=\{\alpha\in S_A;\ |\alpha|_p<\varepsilon\}\longrightarrow\mathcal{B}_P$$

が，$\mathcal{B}_P$ の開集合 $\pi(S_{A,\varepsilon})$ の上への同相写像となる．

以上二つの命題の証明には，$\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ を Sobolev の L_p^2-ノルムで完備化した Hilbert 空間，または Banach 空間の上での陰関数定理，Sobolev の不等式，楕円型微分作用素に関する一般的理論などが必要である．本書の程度を超えるので，ここでは証明を省略する（[24], [31], [32], [36] 参照）．

問 2. $(\exp\Phi)^*(A+\beta)-A=\beta+d_A\Phi+\mathcal{R}(\Phi,\beta)$ を示せ．ただし，Φ,β についての2次以上の項をまとめて $\mathcal{R}(\Phi,\beta)$ とおいた．

既約な接続 A のホロノミー群は $SU(r)$ に一致するから，A のイソトロピー群 Γ_A は，第3章定理 3.5.6 によって，$G=SU(r)$ の中心 $Z(G)$ に等しい．3.4 節の例により，$Z(G)$ は $\mathcal{A}_P$ に自明に作用する．すなわち，$\mathcal{A}_P$ の任意の元 $A, Z(G)$ の任意の元 g について，$g^*(A)=A$ である．したがって，$\mathcal{G}_P$ の $Z(G)$ による剰余群 $\tilde{\mathcal{G}}_P=\mathcal{G}_P/Z(G)$ が $\mathcal{A}_P$ に効果的に作用する．

A が可約な接続のとき，例えば $G=SU(2)$ で，A のホロノミー群が部分群

$$S(U(1)\times U(1))=\left\{\begin{pmatrix} e^{ic} & 0\\ 0 & e^{-ic}\end{pmatrix};\ c\in\boldsymbol{R}\right\}$$

であるとすると，イソトロピー群 Γ_A は

$$Z(G)=\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\}$$

と一致しない．したがって，可約な場合には $\tilde{\mathcal{G}}_P$ の部分群 $\tilde{\Gamma}_A=\Gamma_A/Z(G)$ は単位元のみから成るとは限らない．

命題 6.2.3 $\tilde{\Gamma}_A$ は A のスライス S_A を不変にする．

〔証明〕 $g\in\Gamma_A$ として，$\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ から $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ への写像

$$\alpha\longmapsto g^*(A+\alpha)-A$$

を考えると

$$g^*(A+\alpha)-A=g^{-1}d_Ag+g^*(\alpha)=g^*(\alpha)\ (=g^{-1}\cdot\alpha\cdot g)$$

$\alpha \in S_A$ とすると，$d_A g=0$ であるから

$$d_A^*(g^{-1}\cdot\alpha\cdot g) = -\sum h^{ij} D_i(g^{-1}\cdot\alpha_j\cdot g) = -g^{-1}\left(\sum h^{ij} D_i\alpha_j\right)g = 0$$

よって

$$g^*(A+\alpha) - A \in S_A$$

となり，S_A は不変である．

命題 6.2.4 可約な接続 A に対し，十分小さい正の数 ε が存在して，$S_{A,\varepsilon}$ の $\tilde{\Gamma}_A$ の作用に関する商空間 $S_{A,\varepsilon}/\tilde{\Gamma}_A$ は，$[A]$ を含む $\mathcal{B}_P$ の近傍 $\pi(S_{A,\varepsilon})$ に同相である（[24], [45] 参照）．

6.3 自己双対接続のモジュライ空間

主ファイバー束 P 上の自己双対接続 A については，$[A]$ のまわりでの $\mathcal{M}_P^+$ の局所的状況が，A に関する 楕円複体 6.1.1 のコホモロジー群 $\boldsymbol{H}_A^0, \boldsymbol{H}_A^1, \boldsymbol{H}_{A,-}^2$ によって記述できる．

定理 6.3.1 A を主ファイバー束 P 上の既約な自己双対接続とする．これに対して，1次コホモロジー群 $\boldsymbol{H}_A^1$ の ε-近傍 $U=\{\alpha \in \boldsymbol{H}_A^1;\ |\alpha|<\varepsilon\}$ と C^∞ 写像 $\varphi : U \longrightarrow \boldsymbol{H}_{A,-}^2$ で，$\varphi(0)=0$ かつ 原点で微分写像が 0 となるものが存在して，$[A]$ を含む $\mathcal{M}_P^+$ の近傍は $\{\alpha \in U;\ \varphi(\alpha)=0\}$ と同相である．

〔**証明**〕 命題 6.2.2 により，$[A]$ を含む $\mathcal{B}_P$ の近傍として $\pi(S_{A,\varepsilon'})$ がとれる．ここに，$S_{A,\varepsilon'}$ はスライスの ε-近傍で

$$S_{A,\varepsilon'} = \{\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)\ ;\ d_A^*\alpha=0,\ |\alpha|_p<\varepsilon'\}$$

である．また，(6.1.18) によって，$\mathcal{A}_P^+$ は $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ の部分集合

$$\left\{\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)\ ;\ d_A^-\alpha + \frac{1}{2}\ [\alpha\wedge\alpha]_- = 0\right\}$$

と同一視できる．したがって，$\mathcal{A}_P^+$ の部分集合

$$S_{A,\varepsilon'} \cap \mathcal{A}_P^+ = \left\{\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)\ ;\ |\alpha|_p<\varepsilon',\ d_A^*\alpha=0,\ d_A^-\alpha+\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]_-=0\right\}$$

に対して，$\pi(S_{A,\varepsilon'} \cap \mathcal{A}_P^+)$ は $\mathcal{M}_P^+$ の近傍となっている．

$$\pi|_{S_{A,\varepsilon'}} : S_{A,\varepsilon'} \longrightarrow \pi(S_{A,\varepsilon'})$$

は同相写像（命題 6.2.2）であるから，π の $S_{A,\varepsilon'} \cap \mathcal{A}_P^+$ 上への制限写像は同相写像である．

補題 6.3.2　(6.1.13) で定義した倉西の写像

$$\Xi_A : \Omega^1(\mathfrak{g}_P) \longrightarrow \Omega^1(\mathfrak{g}_P)$$

によって，集合

$$\left\{\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}_P)\,;\ d_A^*\alpha=0,\ \ d_A^-\alpha+\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]_-=0\right\}$$

は，1次のコホモロジー群

$$\boldsymbol{H}_A^1=\{\beta\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)\,;\ d_A^*\beta=0,\ \ d_A^-\beta=0\}$$

に移される．

〔**証明**〕　(6.1.1) により，$d_A^-\circ d_A=0$，随伴作用素をとると $d_A^*\circ d_A^{-*}=0$ となる．$\beta=\Xi_A(\alpha)$ とおくと

$$d_A^*\beta=d_A^*\alpha+d_A^*\left(d_A^{-*}G_A\left(\frac{1}{2}[\alpha\wedge\alpha]_-\right)\right)=0$$

また，命題6.1.3により

$$d_A^-\beta=0 \text{ かつ，} \mathcal{H}_A([\alpha\wedge\alpha]_-)=0$$

補題の証明の最後の部分から

(6.3.1)　　$\alpha\in S_A\cap\mathcal{A}_P^+ \Longleftrightarrow \Xi_A(\alpha)\in\boldsymbol{H}_A^1$ かつ，$\mathcal{H}_A([\alpha\wedge\alpha]_-)=0$

Banach 空間 $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ で，写像 Ξ_A の Frechet 微分を考えると

$$\left.\frac{d\Xi_A}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}(\beta)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{\Xi_A(t\beta)-\Xi_A(0)\}=\beta$$

により，$\left.\dfrac{d\Xi_A}{d\alpha}\right|_{\alpha=0}$ は $\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ の恒等変換となる．

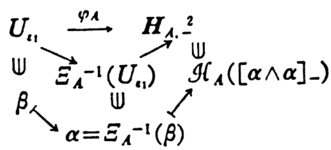
したがって，Banach 空間における逆関数定理（[32]，第2章）により，十分小さい ε_1- 近傍 $U_{\varepsilon_1}=\{\alpha\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P);\ |\alpha|_p<\varepsilon_1\}$ 上で Ξ_A の逆写像 Ξ_A^{-1} が存在して

$$\Xi_A^{-1} : U_{\varepsilon_1} \longrightarrow \Xi^{-1}(U_{\varepsilon_1})$$

は Banach 空間の近傍間の微分同相写像となる．

写像 $\varphi_A : U_{\varepsilon_1} \longrightarrow \boldsymbol{H}_{A,-}^2$ を次のように定義する．

(6.3.2)



Ξ_A が多項式的な写像であるから，$\varphi_A|_{H_A^1}$ は実解析的写像であり，その定義から $\varphi_A(0)=0$ かつ，$\varphi_A|_{H_A^1}$ の $\beta=0$ での微分写像は0となる.

(6.3.1) により，実解析的写像 $\varphi_A|_{H_A^1}$ の零点集合

$$\mathrm{Zero}(\varphi_A|_{H_A^1})=\{\beta\in \boldsymbol{H}_A^1;\ |\beta|_p<\varepsilon_1, \varphi_A(\beta)=0\}$$

の Ξ_A^{-1} による像は，ε_1 を十分小さくとれば $S_{A,\varepsilon}\cap\mathcal{A}_P^+$ の中の開集合で，その像と $\varphi_A|_{H_A^1}$ の零点集合は同相である．すでに見たように

$$\pi|_{S_{A,\varepsilon}\cap\mathcal{A}_P^+}: S_{A,\varepsilon}\cap\mathcal{A}_P^+\longrightarrow\pi(S_{A,\varepsilon}\cap\mathcal{A}_P^+)$$

はモジュライ空間 $\mathcal{M}_P{}^+$ の $[A]$ を含む近傍への同相写像であるから，零点集合 $\mathrm{Zero}(\varphi_A|_{H_A^1})$ は，$[A]$ の近傍と同相になる.

楕円型微分作用素のアプリオリ評価により，$\beta\in\boldsymbol{H}_A^1$ の L_p-ノルムと通常の内積によるノルムとは同値になる．すなわち，多様体 M のみに依存した定数 $c>0$ が存在して，任意の $\beta\in\boldsymbol{H}_A^1$ について

$$\frac{1}{c}|\beta|_p\leqq\|\beta\|\leqq c|\beta|_p,$$

である．また，楕円型微分方程式の一般論から，$\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$ を完備化した Banach 空間の元 β が調和的 $(\Delta_A^1\beta=0)$ ならば C^∞ 的であるから，既約な自己双対接続 A に対して，$\{\beta\in\boldsymbol{H}_A^1;\|\beta\|<\varepsilon,\ \varphi_A(\beta)=0\}$ と同相な，$\mathcal{M}_P^+$ 内の $[A]$ を含む近傍がとれる ([24], [32] 第1章).

注 2. 既約な自己双対接続 A に対しては，$\mathrm{Ker}d_A=0$ である (第3章 3.5節) から，0次コホモロジー群 $\boldsymbol{H}_A^0=\{0\}$ である．いま，2次コホモロジー群 $\boldsymbol{H}_{A,-}^2=\{0\}$ と仮定すると，モジュライ空間の $[A]$ の近傍は $\boldsymbol{H}_A^1$ の ε-近傍と同相である．すなわち $\mathcal{M}_P^+$ は $[A]$ の近くでは，次元が

$$h^1=\dim\boldsymbol{H}_A^1=-\ (\text{楕円複体 6.1.1 の指数})$$

の位相多様体となる．$\boldsymbol{H}_A^1$ の ε-近傍 U_ε が $\mathcal{M}_P^+$ の局所座標系を与え，この座標系によって $\mathcal{M}_P^+$ は可微分構造をもつことが証明される ([24], [36] 参照).

命題 6.3.3 自己双対接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}_P^+$ において，その部分集合 $\mathcal{M}_{P,0}^+=\{[A]\in\mathcal{M}_P^+;\ \boldsymbol{H}_A^0=\{0\},\ \boldsymbol{H}_{A,-}^2=\{0\}\}$ は，d 次元の C^∞ 多様体である．ここに，$d=-\{(6.1.1)$ の指数$\}$ で d は A に依存しない整数である.

注 3. 4次元球面 (S^4, h) (h は標準計量) の上の既約な自己双対接続に対しては，つねに $H^2_- = \{0\}$ である ([36], [51])． (S^4, h) 上の指数1の $SU(2)$-主ファイバー束に対して，その自己双対接続のモジュライ空間は

$$8k-3=8-3=5 \qquad (2.3\text{ 節例，}3.6\text{ 節問，}6.1\text{ 節})$$

により，5次元の C^∞ 多様体である．これは，BPST-インスタントンのパラメータのとりうる自由度が5である (5.3節) ことにちょうど符合している．

今度は，A を可約な自己双対接続と仮定する．そのとき次の命題が成り立つ．

命題 6.3.4 A のイソトロピー群 Γ_A の各元 g は，次の性質をもつ．

(i) $\Xi_A(g^*(\alpha))=g^*(\Xi_A(\alpha))$， $\alpha\in\Omega^1(\mathfrak{g}_P)$

(ii) $d_A(g^*(\Phi))=g^*(d_A\Phi)$， $\Phi\in\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$

(iii) g^* はコホモロジー群 $H^0_A, H^1_A, H_{A,-}^2$ を不変にする．

(iv) g^* は (6.3.2) で定義した写像 φ_A と可換である．

〔証明〕 まず (ii) を証明する．

$$g\in\Gamma_A \Leftrightarrow d_A\, g=0 \text{ であるから}$$

$$d_A(g^*(\Phi))=d_A(g^{-1}\cdot\Phi\cdot g)=g^{-1}(d_A\,\Phi)g=g^*(d_A\,\Phi)$$

g は， $\Omega^k(\mathfrak{g}_P)$ の内積を不変にしているから，(ii) により随伴作用素 d_A^* と，したがって Laplace 作用素 $\Delta^0_A, \Delta^1_A, \Delta_{A,-}^2$ とも可換となる． このことから g はコホモロジー群を不変にする ((iii))．また，g は Green 作用素 G_A とも可換となり，随伴表現として作用することから

$$[g^*(\alpha)\wedge g^*(\alpha)]=g^*[\alpha\wedge\alpha]$$

が成り立ち，(i) が示される．

(iv) は (i) と (iii) から容易に導くことができる．

可約な自己双対接続の近くでのモジュライ空間の様子については，上の命題と命題6.2.4を用いることによって，次の定理がえられる ([24] 第2章§4，[45] p.288 定理6)．

定理 6.3.5 A を可約な自己双対接続とする． H^1_A の0の ε-近傍 U と，$\tilde{\Gamma}_A=\Gamma_A/Z(G)$ の作用と可換な実解析的写像 $\varphi_A: U \longrightarrow H_{A,-}^2$ で， $\varphi_A(0)=0$ かつ，φ_A の $\beta=0$ での微分写像が0となるものが存在して，$[A]$ でのモジュライ空間 $\mathcal{M}_P^+$ の近傍は $\{\beta\in U; \varphi_A(\beta)=0\}/\tilde{\Gamma}_A$ と同相である．

この定理によれば，$\mathcal{M}_P^+$ の $[A]$ での局所的な状況は，例えば，$\tilde{\Gamma}_A$ が $U(1)$ $(=S^1)$ であって $\boldsymbol{H}_{A,-}^2=\{0\}$ の場合には，図のように錐状特異点をもつことがわかる．

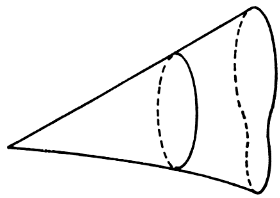


図 6.3 モジュライ空間の特異点

参考文献とあとがき

本書を執筆するにあたって参考にした書物をあげておく．

多様体と Lie 群に関する参考書．

[1] 村上信吾，多様体，共立出版，(1978)．

[2] 松島与三，多様体入門，裳華房，(1967)．

[3] 服部晶夫，多様体，岩波書店，(1978)．

[4] M. Hirsch, Differential topology, Springer, (1976).

[5] S. Helgason, Differential geometry, Lie groups and Symmetric spaces, Academic, (1978).

[6] ポントリャーギン，連続群論（上，下）柴岡，杉浦，宮崎共訳　岩波書店，(1965, 1966)．

[7] 村上信吾　連続群論の基礎，朝倉書店，(1975)．

[8] 伊勢幹夫　Lie 群 1 岩波講座　基礎数学，岩波書店，(1977)．

[9] 竹内外史，リー代数と素粒子論，裳華房，(1983)．

[10] 大森英樹，無限次元リー群論，紀伊国屋書店，(1978)．

Lie 代数については [2], [5], [6], [7], [8], [9] のほかに次の [11] が参考になる．

[11] 松島与三，リー環論，共立出版，(1956)．

ホモロジー，コホモロジーに関しては

[12] 中岡稔，位相幾何学（ホモロジー）共立出版，(1970)．

一般相対論についての参考書．

[13] 矢野健太郎，相対性理論，至文堂，(1970)．

[14] 山内恭彦，内山龍雄，中野董夫，一般相対性および重力の理論，裳華房，(1971)．

[15] 内山龍雄，相対性理論，岩波書店，(1979)．

ファイバー束と接続についての参考書．

[16] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of differential geometry, 1巻, Interscience, (1963).

[17] S. Kobayashi, K. Nomizu, Foundations of differential geometry, 2巻, Interscience, (1969).

[18] N. Steenrod, The topology of fibre bundles（邦訳あり）Princeton, (1972).

[19] F. Hirzebruch, Topological methods in algebraic geometry（邦訳あり）Springer, (1966).

[20] M. Spivak, A comprehensive introduction to differential geometry, 2巻, Publish or Perish, (1979).

[21] 野水克己, 現代微分幾何入門, 裳華房, (1981).

[16]には主ファイバー束上の Ehresmann 接続について詳しい議論がなされている.

[18]はファイバー束の古典的名著であり, 熟読をすすめたい. [19] はベクトル束の特性類の公式の計算をするとき参考になる.

[20]はユニークなスタイルの本で, Levi-Civita 接続の構造方程式から Ehresmann 接続が生まれるプロセスを解説した部分など面白い.

ゲージ理論, Yang-Mills 接続を数学的に扱っている本はあまり多くない.

[22] M. Atiyah, Geometry of Yang-Mills fields, Pisa, (1979).

[23] D. Bleeker, Gauge theory and variational principles, Addison-Wesley, (1981).

[24] D. Freed, K. Uhlenbeck, Instantons and four-manifolds, Springer, (1984).

[25] C. Nash, S. Sen, Topology and geometry for physics, Academic, (1983).

ゲージ理論を本格的に学ぼうとする人には, ぜひ [22], [24] を読むことをおすすめする. 本書第5章の部分は [22] に負っている. [23] は主ファイバー束と接続の部分が参考になると思われる. [25] は数学を専門とする人以外の人がトポロジーと幾何を手っとりばやく学ぶのに便利な本である. [24] はモジュライ空間の大域解析学を扱った唯一の成書で, 後述の [45] を数学的に厳密に解説したものである. これらのほかに入手できるものとして

[26] 坂根由昌, 竹内勝, Yang-Mills 場の幾何学「数学」32巻, 岩波書店 (1980).

[27] T. Eguchi, P. B. Gilkey, A. J. Hanson, Gravitation, gauge theories and differential geometry, Physics Reports, North-Holland 66巻, (1980).

がある. 本書第4章 第2変分公式の部分は [26] に負うところが大きい. [27] はゲージ理論と微分幾何学に関する大部のレポート集であり, 本書とあわせて読まれるとよい. 特に1970年代までのゲージ理論の進展の概説部分は参考になる.

Yang-Mills-Higgs 場, モノポール関係の書物としては次のものがある.

[28] A. Jaffe, C. Taubes, Vortices and Monopoles, Birkhäuser (1980).

Atiyah-Singer の指数定理については, 前掲 [19], [27] のほかに

[29] P. Shanahan, The Atiyah-Singer index theorem, Springer, Lect. Note, (1978).

[30] T. Friedrich (ed.) Self-dual Riemannian geometry and instantons, Teubner, (1981).

などがある. [30] は後掲論文 [36] の解説書である.

Yang-Mills 接続を非線形方程式の解とみなす立場に立った場合，ベクトル束上の幾何学の問題と関連した非線形微分方程式についての書物はあまり多くない．[24] のほかに次のものがある．

[31] T. Aubin, Nonlinear analysis on manifolds. Monge-Ampère Equations, Springer, (1982).

[32] J. Kazdan, Some applications of partial equations to problems in geometry, Surveys in Geometry 1983/84 報告集.

ゲージ理論および Yang-Mills 場に関する参考文献をすべて網羅することは不可能に近いので，そのうち重要と思われるものを列挙してみよう．

[33] M. Atiyah, R. Ward, Instantons and algebraic geometry, Comm. Math. Phys, 55(1977).

[34] M. Atiyah, V. Drinfeld, N. Hitchin, Yu Manin, Constructions of instantons, Phys. Lett, 65A (1978).

[35] M. Atiyah, J. Jones, Topological aspects of Yang-Mills theory, Comm. Math. Phys, 61(1978).

[36] M. Atiyah, N. Hitchin, I. Singer, Self-duality in 4-dimensional Riemannian geometry, Proc, R.S. London, A362 (1978).

[37] M. Atiyah, R. Bott, The Yang-Mills equations over Riemann surfaces Phil. Trans. R. Soc. Lond, A308 (1982).

[38] M. Atiyah, Instantons in two and four dimensions, Comm. Math. Phys, 93(1984).

[39] A. Belavin, A. Polyakov, A. Schwartz, Yu Tyupkin, Pseudo-particle solutions of the Yang-Mills equations, Phys. Lett, 59B (1975).

[40] E. Bogomolny, The stability of classical solutions, Sov. J. Nucl. Phys, 24(1976).

[41] J.P. Bourguignon, H. Lawson, Stability and isolation phenomena for Yang-Mills fields, Comm. Math. Phys, 79(1981).

[42] E. Corrigan, D. Fairlie, Scalar field theory and exact solutions to a classical SU(2)-gauge theory, Phys. Lett, 67B (1977).

[43] V. Drinfeld, Yu Manin, A description of instantons, Comm. Math. Phys, 63(1978).

[44] S. Donaldson, A new proof of a theorem of Narasimhan and Seshadri, J. Diff. Geometry, 18 (1983).

[45] S. Donaldson, An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds, J. Diff. Geometry, 18(1983).

[46] S. Donaldson, Instantons and geometric invariant theory, Comm. Math.

Phys, 93(1984).

[47] S. Donaldson, Anti-self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, Proc. London, Math, Soc, (3) 50 (1985).

[48] C. Gu, On parallel Yang-Millls fields, in Seminar on differential geometry (edited by Yau) Princeton, (1982).

[49] N. Hitchin, Kähler twistor spaces, Proc. London Math. Soc, 3, 43(1981).

[50] N. Hitchin, Monopoles and geodesics, Comm. Math. Phys, 83(1982).

[51] M. Itoh, Geometry of Yang-Mills connections over a Kähler surface, Proc. Japan, Acad. 59A (1983).

[52] M. Itoh, Self-dual Yang-Mills equations and Taubes' theorem, Tsukuba J, Math, 8(1984).

[53] R. Jackiw, C. Nohl, C. Rebbi, Conformal properties of pseudo-particle configurations, Phys. Rev, 150(1977).

[54] S. Kobayashi, Curvature and stability of vector bundles, Proc. Japan, Acad, 58A (1982).

[55] S. Kobayashi, Stable vector bundles and curvature (Surveys in Geometry 1984/85 報告集) (1984).

[56] R. Mills, C. Yang, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, Phys. Rev, 96. 1(1954).

[57] M. Prasad, Instantons and monopoles in Yang-Mills gauge fields theories, Physica, 1D(1980).

[58] M. Prasad, C. Sommerfield, Exact classical solution for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon, Phys. Rev. Lett, 35(1975).

[59] I. Singer, Some remarks on the Gribov ambiguity, Comm. Math. Phys, 60(1978).

[60] C. Taubes, The existence of a non-minimal solution to the SU(2) Yang-Mills Higgs equations on R^3, I, II Comm. Math. Phys, 86(1982).

[61] C. Taubes, Self-dual connections on non self-dual 4-manifolds, J. Diff. Geometry, 17(1982).

[62] C. Taubes, Stability in Yang-Mills theories, Comm. Math. Phys, 91(1983).

[63] C. Taubes, A brief survey of the Yang-Mills-Higgs equations on R^3 (preprint).

[64] K. Uhlenbeck, Connections with L^p-bounds on curvatures, Comm. Math. Phys, 83(1982).

[65] K. Uhlenbeck, Removable singularities in Yang-Mills fields, Comm. Math.

Phys, 83(1982).
[66] R. Utiyama, Invariant theoretical interpretation of interaction, Phys. Rev, 101, 5(1956).
[67] R. Ward, On self-dual gauge fields, Phys. Lett, 61A (1977).
[68] T. Wu, C. Yang, Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields, Phys. Rev, D12, 12(1975).
[69] C. Yang, Magnetic monopoles, fibre bundles, and gauge fields, Annals New York Acad. of Sciences, 294(1977).

特に [56], [66], [68], [69] はゲージ理論の創始者たちの論文であり，これらを熟読玩味することをおすすめする．

インスタントン解について 第5章でBPST-インスタントンといわれる S^4 上の自己双対接続を扱ったが，4元数による記述の方法は [22] による．オリジナルなものについては [39] を参照されたい．任意指数 $k>0$ の S^4 上のファイバー束でのインスタントン解についてはAtiyah-Drinfeld-Hitchin-Manin の構成法（ADHM 構成法）がある．これについては [34] を参照されたい．細かい議論は [22] に詳しい．その特別な場合として 't Hooft の k-インスタントン解が導かれる（[42], [53]）．ADHM 構成法によるインスタントン解の特徴は，パラメータの個数が第6章で計算されたモジュライ空間の次元 $8k-3$ に一致しているということである．

自己双対接続の存在定理と特異点除去可能性 $SU(2)$-主ファイバー束 $P\longrightarrow S^4$ 上のYang-Mills 接続は，汎関数の値を最小にする（すなわち（反）自己双対接続）であろうと予想されている（[35]）が，現在のところ，否定も肯定もされていない（弱安定性の条件のもとでは肯定的（第4章　定理 4.3.13））．自己双対接続が存在するための条件としては Taubes によって与えられたものがある（[52], [61]）．それは，$P(M,G)$ 上の接続 A が“ほとんど自己双対的”ならば第6章　6.1節（6.1.17）は解 Ψ をもつ，すなわち $A+(d_A^-)^*\Psi$ は自己双対接続となるというものである．さて，'t Hooft のインスタントン解でも ADHM 構成法による解でも，その具体的表示には特異点があらわれる．しかし，その特異点は一般的に除去可能であるということを示したのが次の Uhlenbeck の定理である（[65]，第5章　5.3節問も参照）．

定理（Uhlenbeck）　$B=\{x\in R^4;\ |x|\leq 1\}$ とする．A を $B\backslash\{0\}$ 上の主ファイバー束 P における Yang-Mills 接続で $\int_{B\backslash\{0\}}|F(A)|^2dx<\infty$ ならば，適当なゲージのもとに，P は B 上の主ファイバー束 $\bar{P}$ に，A は $\bar{P}$ 上の Yang-Mills 接続 $\bar{A}$ に拡張される．

この定理の系として第5章定理 5.2.4 が導かれる．

Taubes の定理にしろ，この定理にしろ，次元についての制約をもつ解析的な評価を用いるので，底空間の次元が5以上の場合には，同様の定理は成り立たない．

自己双対接続のモジュライ空間の大域的性質 第6章で，$SU(2)$-主ファイバー束 P

$\longrightarrow S^4$ 上の自己双対接続のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ は $8k-3$ 次元（k は P の指数）の C^∞ 多様体の構造をもつことが示された．この条件を緩和して，S^4 をコンパクト単連結 4 次元 Riemann 多様体 M に代え，2 次形式 Q ; $H^2(M; \boldsymbol{R})\times H^2(M; \boldsymbol{R}) \longrightarrow \boldsymbol{R}$ が正定値としても $\mathcal{M}$ の次元は $8k-3$ である．$k=1$ の場合には M 上のモジュライ空間 $\mathcal{M}$ の大域的性質が Donaldson によってあきらかにされた（[24], [45]）．4 次元多様体 M 自身を 5 次元の $\mathcal{M}$ に境界として貼りつけることができ，このコンパクト化により，トポロジーのコボルディズム理論が用いられて 4 次元トポロジーの永年懸案であった 2 次形式の問題解決に大きな前進がもたらされた．その副産物として $\boldsymbol{R}^4$ に標準的可微分構造とは同値でない可微分構造が可算無限個許されることが示された（[24]）．

反自己双対接続と複素構造 可積分な概複素構造 J をもつ C^∞ 多様体 M は，その局所座標として複素変数 $z^1, \cdots, z^n, z^k=x^{2k-1}+\sqrt{-1}\,x^{2k}$ $(1\leq k\leq n)$ がとれて，いわゆる複素多様体となる（第 1 章 1.1 節例）．M 上の Riemann 計量 g は $g(JX, JY)=g(X, Y)$, $\nabla J=0$ をみたすとき，Kähler 計量といい，Kähler 計量をもつ複素多様体は Kähler 多様体といわれる（[1]）．複素射影空間 $P^n(\boldsymbol{C})$ や $P^n(\boldsymbol{C})$ 内の代数多様体は Kähler 多様体の例である．第 5 章 5.3 節例の事実に注目すると，正則構造の可積分条件より M をコンパクトな実 4 次元 Kähler 多様体としたとき，$SU(n)$-主ファイバー束 $P \longrightarrow M$ が反自己双対接続 A をもてば，同伴ベクトル束 $\boldsymbol{E}=P\times_\rho C^n$ は正則なベクトル束となる（[36]）．A が既約ならば，さらに $\boldsymbol{E}$ は Mumford と Takemoto の意味で“安定”なベクトル束となり（[54], [55]），反自己双対接続は Hermite Einstein 計量を $\boldsymbol{E}$ 上に定める．実 4 次元代数的多様体上の“安定”なベクトル束上には，Hermite Einstein 計量が存在するであろうという小林の予想は，運動量写像と熱方程式の方法で Donaldson によって肯定的に解決された（[47]）．またさらに，4 次元 Kähler 多様体上の反自己双対接続のモジュライ空間は，複素解析的空間の構造をもつことが著者（伊藤）によって示された（[51]）．

さて，複素ベクトル空間 $\boldsymbol{C}^2$ は 4 元数体と同一視され，$\boldsymbol{C}$ は $\boldsymbol{H}$ の部分空間とみなされる．そこで

$$P^3(\boldsymbol{C})=\boldsymbol{C}^4\backslash\{0\}/\boldsymbol{C}\backslash\{0\},$$
$$P^1(\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}^2\backslash\{0\}/\boldsymbol{H}\backslash\{0\}$$

として，写像 $\pi : P^3(\boldsymbol{C}) \longrightarrow P^1(\boldsymbol{H})$ はその自然な射影であるとすると，これは，底空間が $S^4=P^1(\boldsymbol{H})$，ファイバーが $P^1(\boldsymbol{C})$ であるファイバー束となる．これは Penrose の twistor 空間とよばれている（[22]）．

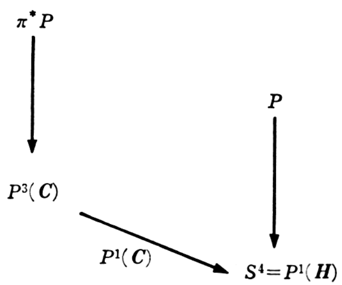


図 Penrose の twistor 空間

これについて，次の補題が成り立つ．

補題（[22], [33], [67]） S^4 上の自己双対 2-形式 ω の π によるひきもどし $\pi^*(\omega)$ は，$P^3(\boldsymbol{C})$ 上のタイプ (1, 1) の微分形式

$$\pi^*(\omega)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\omega_{\alpha\bar\beta}dz^\alpha\wedge d\bar z^\beta$$

となる．

この事実により，主ファイバー束 $P\longrightarrow S^4$ 上の自己双対接続 A の $\pi^*(P)\longrightarrow P^3(\boldsymbol{C})$ 上へのひきもどしは，$\pi^*(P)$ に同伴するベクトル束 $\boldsymbol{E}$ に複素構造を定義し，その結果として $\boldsymbol{E}$ は正則ベクトル束となる．インスタントンから定まるという意味で $\boldsymbol{E}$ をインスタントン束という．自己双対 Yang-Mills 接続のモジュライ空間に呼応して，$P^3(\boldsymbol{C})$ 上の正則ベクトル束の族が定まる．S^4 上のインスタントンを調べることにより $P^3(\boldsymbol{C})$ 上の正則ベクトル束の幾何的性質があきらかにされる（[22]）．

Penrose の twistor 空間の考えは一般化される（[36]）．すなわち，4 次元のむきづけられた Riemann 多様体 (M,h) に対してつねに 6 次元 C^∞ 多様体 $\overline{M}$ がとれて，$\overline{M}$ は M 上のファイバーが $P^1(\boldsymbol{C})$ のファイバー束となる．$\overline{M}$ 上に自然に定まる概複素構造 J が可積分となるための必要十分条件は (M,h) の共形構造に関して Weyl の共形曲率テンソル C を $\mathrm{End}(TM)$-値 2-形式とみなしたとき，$C=C_+$ (C が自己双対的) ということである．このような (M,h) を自己双対空間とよんでいる．

Yang-Mills-Higgs 場とモノポール　作用積分 (5.1.2) は (Minkowski 空間 $\boldsymbol{R}^3$)×(時間軸 $\boldsymbol{R}$) 上の非線形波動方程式の静的解のエネルギーを与えている．Yang-Mills-Higgs 場はしたがってソリトン解ともみなされる．この方程式は 4 種の基本的相互作用を統一的に記述する方程式を単純化したものと考えられている．$G=SU(2)$ モデルは弱い相互作用と電磁相互作用の統一的理論を表現している．Yang-Mills-Higgs 場 (A,Φ) からは電場 $\boldsymbol{E}$，磁場 $\boldsymbol{B}$ が導かれるが，$\boldsymbol{B}$ はこの場合には発散条件 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}=0$ をみたさない（第 1 章　1.5 節）．磁石の N 極，S 極が単独で存在（すなわち磁気モノポールの存在）するということになる（[63]）．Yang-Mills-Higgs 場に関して，数学的には $\boldsymbol{R}^4$ 上の漸近的平坦な接続の場合と同様に(第 5 章　5.2 節)次のことがわかっている([60])．

集合　$\mathcal{C}=\{(A,\Phi)\in\mathcal{A}\times\Omega^0(\mathfrak{g}_P)\,;\,a(A,\Phi)<\infty\}$ は可算個の部分集合 $\mathcal{C}_q$ $(q\in\boldsymbol{Z})$ の和集合として表される：

$$\mathcal{C}=\bigcup_{q\in\boldsymbol{Z}}\mathcal{C}_q,\quad \mathcal{C}_q\cap\mathcal{C}_{q'}=\phi\quad(q\neq q').$$

さらに

$$\int_{\boldsymbol{R}^3}\langle F(A),\ D_A\Phi\rangle du=4\pi q,\quad (A,\Phi)\in\mathcal{C}_q \text{ かつ } a(A,\Phi)\geqq 4\pi|q|$$

であり，等号が成り立つのは $*F(A)=\mathrm{sgn}(q)D_A\Phi$ のときに限る（第 5 章　5.1 節　問の (5.1.14)），すなわち (A,Φ) がモノポールということである．モノポールのモジュライ空間の構造が Donaldson によって調べられ，それは位数 q の有理写像 f; $P^1(\boldsymbol{C})\longrightarrow P^1(\boldsymbol{C})$，$f(0)=0$ の全体と同一視されることがあきらかにされた(Nahm's equations and the classification of monopoles, Commun. Math. Phys., 96(1984). 参照)．

索　　引

ハ

ヒ

フ

ヘ, ホ

ミ, ム, モ

ユ, ヨ

リ, レ

ワ

欧　　文

――著者紹介――

茂　木　　勇（もぎ いさむ）

1947年　東京文理科大学数学科卒業
専　攻　微分幾何学
現　在　筑波大学名誉教授　理学博士

伊　藤　光　弘（いとう みつひろ）

1972年　東京教育大学理学部数学科卒業
専　攻　微分幾何学
現　在　筑波大学数学系教授　理学博士

検　印　廃　止

復刊　微分幾何学とゲージ理論

1986年 9月 20日　初版1刷発行
1989年 10月 10日　初版3刷発行
2001年 11月 25日　復刊1刷発行

NDC 414.7

著　者　茂　木　　勇
　　　　伊　藤　光　弘

発行者　南　條　光　章
東京都文京区小日向4丁目6番19号

印刷者　杉　本　幹　夫
東京都新宿区市谷本村町3丁目29番

発行所　東京都文京区小日向4丁目6番19号
電話　東京(03)3947-2511番（代表）
郵便番号112-8700
振替口座 00110-2-57035番
URL　http://www.kyoritsu-pub.co.jp/

共立出版株式会社

印刷・新日本印刷　　製本・中條製本　　Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会　員

ISBN4-320-01687-4